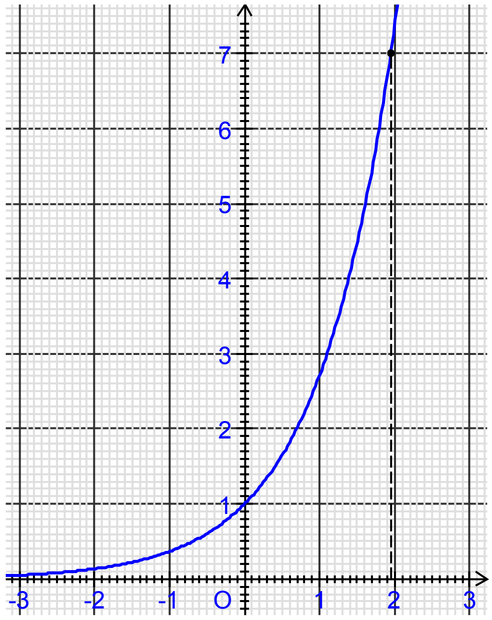
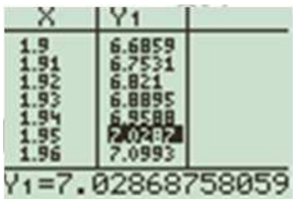
Exercice 01

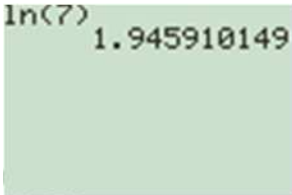
1°) On observe sur le dessin que le point d'ordonnée 7 de la courbe a une abscisse comprise entre 1,9 et 2.
Le réel a tel que $e^a = 7$ est donc tel que
$1{,}9 \leqslant a \leqslant 2$



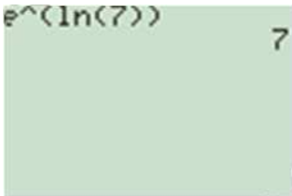
2°) Un tableau de valeurs de la fonction exponentielle, fait avec la calculatrice permet d'observer que
$e^{1{,}94} \approx 6{,}96$ et $e^{1{,}95} \approx 7{,}03$
On a donc $e^{1{,}94} \leqslant 7 \leqslant e^{1{,}95}$
c'est-à-dire $e^{1{,}94} \leqslant e^a \leqslant e^{1{,}95}$
La fonction exponentielle étant croissante on en déduit que :
$1{,}94 \leqslant a \leqslant 1{,}95$



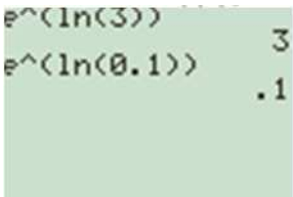
3°) D'après la calculatrice on a :
$\ell n(7) \approx 1{,}946$
Cette valeur correspond à l'encadrement $1{,}94 \leqslant a \leqslant 1{,}95$

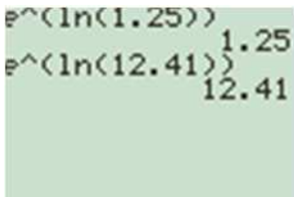


4°) D'après la calculatrice on a :
$e^{\ell n(7)} = 7$
On peut dire que $\ell n(7)$ est le nombre a tel que $e^a = 7$



5°) D'après la calculatrice on a :
$e^{\ell n(3)} = 3$
$e^{\ell n(0{,}1)} = 0{,}1$
$e^{\ell n(1{,}25)} = 1{,}25$
$e^{\ell n(12{,}41)} = 12{,}41$





On peut dire que :
$\ell n(3)$ est le nombre a tel que $e^a = 3$
$\ell n(0{,}1)$ est le nombre a tel que $e^a = 0{,}1$
$\ell n(1{,}25)$ est le nombre a tel que $e^a = 1{,}25$
$\ell n(12{,}41)$ est le nombre a tel que $e^a = 12{,}41$

Exercice 03

On sait que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a : $e^{\ell n\, x} = x$
Donc $e^{\ell n\, 2} = 2$; $e^{\ell n\, 3} = 3$; $e^{\ell n\, 6} = 6$

On sait que pour tous réels a et b, on a : $e^{a+b} = e^{a} \times e^{b}$
donc $e^{\ell n(2) + \ell n(3)} = e^{\ell n(2)} \times e^{\ell n(3)} = 2 \times 3$
donc $e^{\ell n(2) + \ell n(3)} = 6$

Sachant que $e^{y} = x \Leftrightarrow y = \ell n x$, on en déduit que $\ell n(2) + \ell n(3) = \ell n(6)$.

On a $e^{\ell n(4) + \ell n(5)} = e^{\ell n(4)} \times e^{\ell n(5)} = 4 \times 5$
donc $e^{\ell n(4) + \ell n(5)} = 20$

On en déduit que $\ell n(4) + \ell n(5) = \ell n(20)$.

Exercice 05

On sait que pour tous réels a et b, on a : $e^{a+b} = e^a \times e^b$

Donc $e^{\ell n(\sqrt{3}) + \ell n(\sqrt{3})} = e^{\ell n(\sqrt{3})} \times e^{\ell n(\sqrt{3})} = \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ donc $e^{\ell n(\sqrt{3}) + \ell n(\sqrt{3})} = 3$.

Sachant que $e^y = x \iff y = \ell n x$, on en déduit que $\ell n(\sqrt{3}) + \ell n(\sqrt{3}) = \ell n(3)$.

On a donc $2\,\ell n(\sqrt{3}) = \ell n(3)$, c'est-à-dire $\ell n(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{2}\ell n(3)$

De même on peut écrire :

$e^{\ell n(\sqrt{5}) + \ell n(\sqrt{5})} = e^{\ell n(\sqrt{5})} \times e^{\ell n(\sqrt{5})} = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$

on en déduit que $\ell n(\sqrt{5}) + \ell n(\sqrt{5}) = \ell n(5)$ et par conséquent $2\,\ell n(\sqrt{5}) = \ell n(5)$,

c'est-à-dire $\ell n(\sqrt{5}) = \dfrac{1}{2}\ell n(5)$

Exercice 07

$\ell n\left(\frac{1}{3}\right) + 2\ \ell n(\sqrt{3}) = -\ \ell n(3) + 2 \times \frac{1}{2}\ell n(3) = -\ \ell n(3) + \ell n(3)$ donc $\ell n\left(\frac{1}{3}\right) + 2\ \ell n(\sqrt{3}) = 0$

$\ell n(2 + \sqrt{3}) + \ell n(2 - \sqrt{3}) = \ell n\left[\ (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\ \right] = \ell n\left[\ 4 - 3\ \right] = \ell n(1)$

donc $\ell n(2 + \sqrt{3}) + \ell n(2 - \sqrt{3}) = 0$

$$\ell n\left(\frac{1}{\sqrt{3} + 1}\right) - \ell n(\sqrt{3} - 1) = \ell n\left(\frac{1}{\sqrt{3} + 1}\right) + \ell n\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 1}\right) = \ell n\left[\frac{1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{1}{\sqrt{3} - 1}\right] = \ell n\left[\frac{1}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}\right]$$

$$= \ell n\left(\frac{1}{3 - 1}\right) = \ell n\left(\frac{1}{2}\right) = -\ \ell n(2)$$

Donc $\ell n\left(\frac{1}{\sqrt{3} + 1}\right) - \ell n(\sqrt{3} - 1) = -\ \ell n(2)$

Exercice 08

$\ell n\,10 = \ell n(2 \times 5)$ donc $\ell n\; 10 = \ell n(2) + \ell n(5)$

$\ell n\; 25 = \ell n\; 5^2$ donc $\ell n\,25 = 2\,\ell n\,5$

$\ell n\,16 = \ell n\; 2^4$ donc $\ell n\,16 = 4\,\ell n\,2$

$\ell n\; 400 = \ell n(16 \times 25) = \ell n(16) + \ell n(25) = \ell n(2^4) + \ell n(5^2) = 4\;\ell n(2) + 2\;\ell n(5)$
Donc $\ell n\,400 = 4\;\ell n(2) + 2\;\ell n(5)$

$\ell n\,\dfrac{2}{25} = \ell n(2) - \ell n(25) = \ell n(2) - \ell n(5^2) = \ell n(2) - 2\;\ell n(5)$ donc $\ell n\,\dfrac{2}{25} = \ell n(2) - 2\;\ell n(5)$

$\ell n\,\dfrac{1}{100} = -\;\ell n\,100 = -\;\ell n\,10^2 = -\;2\;\ell n\,10 = -\;2\;\ell n(2 \times 5) = -2\;[\ell n(2) + \ell n(5)] = -\;2\;\ell n(2) - 2\;\ell n(5)$
donc $\ell n\,\dfrac{1}{100} = -\;2\;\ell n(2) - 2\;\ell n(5)$

$\ell n\,\dfrac{5}{8} = \ell n(5) - \ell n(8) = \ell n(5) - \ell n(2^3) = \ell n(5) - 3\;\ell n(2)$ donc $\ell n\,\dfrac{5}{8} = \ell n(5) - 3\;\ell n(2)$

$\ell n\,0{,}4 = \ell n\,\dfrac{4}{10} = \ell n\,\dfrac{2}{5} = \ell n(2) - \ell n(5)$ donc $\ell n\;0{,}4 = \ell n(2) - \ell n(5)$

$\ell n\;(\sqrt{5}\,) = \dfrac{1}{2}\,\ell n\,5$

$\ell n(2\sqrt{2}\,) = \ell n(2) + \ell n(\sqrt{2}\,) = \ell n(2) + \dfrac{1}{2}\,\ell n(2) = \dfrac{3}{2}\,\ell n\,2$ donc $\ell n(2\sqrt{2}\,) = \dfrac{3}{2}\,\ell n\,2$

$\ell n(5\sqrt{10}\,) = \ell n(5) + \ell n(\sqrt{10}\,) = \ell n(5) + \dfrac{1}{2}\,\ell n(10) = \ell n(5) + \dfrac{1}{2}\,\ell n(2 \times 5) = \ell n(5) + \dfrac{1}{2}\,[\ell n(2) + \ell n(5)]$
$= \ell n(5) + \dfrac{1}{2}\,\ell n(2) + \dfrac{1}{2}\,\ell n(5)$
Donc $\ell n(5\sqrt{10}\,) = \dfrac{1}{2}\,\ell n(2) + \dfrac{3}{2}\,\ell n(5)$

$\ell n\,\dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \ell n(5\sqrt{2}\,) - \ell n(2) = \ell n(5) + \ell n(\sqrt{2}\,) - \ell n(2) = \ell n(5) + \dfrac{1}{2}\,\ell n(2) - \ell n(2) = \ell n(5) - \dfrac{1}{2}\,\ell n(2)$
donc $\ell n\,\dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \ell n(5) - \dfrac{1}{2}\,\ell n(2)$

Exercice 10

$\ell n \dfrac{a}{b^2} = \ell n(a) - \ell n(b^2)$ donc $\ell n \dfrac{a}{b^2} = \ell n(a) - 2\,\ell n(b)$

$\ell n(a^3 \times b^5) = \ell n(a^3) + \ell n(b^5)$ donc $\ell n(a^3 \times b^5) = 3\,\ell n(a) + 5\,\ell n(b)$

$\ell n(ab^3) = \ell n(a) + \ell n(b^3)$ donc $\ell n(ab^3) = \ell n(a) + 3\,\ell n(b)$

$\ell n \dfrac{b^2}{a^3} = \ell n(b^2) - \ell n(a^3)$ donc $\ell n \dfrac{b^2}{a^3} = 2\,\ell n(b) - 3\,\ell n(a)$

$\ell n\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^3\right] = 3\,\ell n \dfrac{a}{b} = 3\,[\ell n(a) - \ell n(b)]$ donc $\ell n\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^3\right] = 3\,\ell n(a) - 3\,\ell n(b)$

$\dfrac{\ell n(a)}{\ell n(ab^2)} = \dfrac{\ell n(a)}{\ell n(a) + \ell n(b^2)}$ donc $\dfrac{\ell n(a)}{\ell n(ab^2)} = \dfrac{\ell n(a)}{\ell n(a) + 2\,\ell n(b)}$

$\dfrac{\ell n(ab^4)}{\ell n(b)} = \dfrac{\ell n(a) + \ell n(b^4)}{\ell n(b)}$ donc $\dfrac{\ell n(ab^4)}{\ell n(b)} = \dfrac{\ell n(a) + 4\,\ell n(b)}{\ell n(b)} = \dfrac{\ell n(a)}{\ell n(b)} + 4$

Exercice 13

- L'équation $3 - 5e^x = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire :

  $3 - 5e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 5e^x \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \dfrac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ell n \dfrac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ell n(3) - \ell n(5)$

  Donc l'équation $3 - 5e^x = 0$ a pour solution unique $\ell n(3) - \ell n(5)$

- L'équation $2e^x + 1 = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire :

  $2e^x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = -\dfrac{1}{2}$

  On sait que pour tout réel x on a $e^x > 0$, donc l'équation $e^x = -\dfrac{1}{2}$ n'a pas de solution.

  On en déduit que l'équation $2e^x + 1 = 0$ n'a aucune solution

- L'équation $1 + \ell n\, x = 0$ est définie sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ on peut écrire :

  $1 + \ell n\, x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell n\, x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{e}$

  Donc l'équation $1 + \ell n\, x = 0$ a pour solution unique $\dfrac{1}{e}$

- L'équation $2 + 3\,\ell n\, x = 0$ est définie sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ on peut écrire :

  $2 + 3\,\ell n\, x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,\ell n\, x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell n\, x = -\dfrac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-\frac{2}{3}}$

  Donc l'équation $2 + 3\,\ell n\, x = 0$ a pour solution unique $e^{-\frac{2}{3}}$

Exercice 15

On sait que la fonction ℓn est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que $(\ell n\, x)' = \dfrac{1}{x}$

f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x + 2\,\ell n\, x$

donc $f'(x) = 1 + 2 \times \dfrac{1}{x}$ c'est-à-dire $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$

g est définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 3 + x\,\ell n\, x$

donc $g'(x) = 0 + 1 \times \ell n(x) + x \times \dfrac{1}{x}$ c'est-à-dire $g'(x) = \ell n\,(x) + 1$

h est définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = (x - 1)\,\ell n\, x$

donc $h'(x) = 1 \times \ell n(x) + (x - 1) \times \dfrac{1}{x}$ c'est-à-dire $h'(x) = \ell n(x) + 1 - \dfrac{1}{x}$

j est définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $j(x) = \dfrac{\ell n\, x}{x}$

donc $j'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} \times x - (\ell n\, x) \times 1}{x^2}$ c'est-à-dire $j'(x) = \dfrac{1 - \ell n\, x}{x^2}$

Exercice 17

1°) h est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \ell n(x) - (x - 1)$

On en déduit que $h'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$

On peut écrire $h'(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

Comme $x \in\,]0\,;+\infty[$ on a $x > 0$, donc $h'(x)$ est du signe de $1 - x$

On a $1 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > x \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$

Donc $h'(x) > 0$ pour $x \in\,]0\,;1[$; $h'(x) < 0$ pour $x \in\,]1\,;+\infty[$ et $h'(x) = 0$ pour $x = 1$

2°) D'après le signe de $h'(x)$, la fonction h est croissante sur $]0\,;1[$ et décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

On en déduit que h a un maximum en 1.

$h(1) = \ell n(1) - (1 - 1) = 0 - 0 = 0$

Donc le maximum de la fonction h est 0.

3°) h ayant pour maximum 0, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$ on a $h(x) \leqslant 0$ c'est-à-dire $\ell n(x) - (x - 1) \leqslant 0$

On en déduit que : pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$ on a $\ell n\, x \leqslant x - 1$

Exercice 18

1°) f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ell n\, x}{x}$

On a donc $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-(\ell n\, x)\times 1}{x^2}$ donc $f'(x)=\dfrac{1-\ell n\, x}{x^2}$ pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$.

x^2 étant toujours positif, le signe de $f'(x)$ est le signe de $1-\ell n\, x$.

On a $1-\ell n\, x>0 \iff 1>\ell n\, x \iff \ell n\, x<1 \iff x<e$

De même $1-\ell n\, x<0 \iff x>e$ et $1-\ell n\, x=0 \iff x=e$

(car la fonction ℓn est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$)

On a donc : $f'(x)>0$ pour $x\in\,]0\,;e[$; $f'(x)<0$ pour $x\in\,]e\,;+\infty[$ et $f'(x)=0$ pour $x=e$.

2°) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\ell n\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{-\ell n\, 2}{\frac{1}{2}}=(-\ell n\, 2)\times\dfrac{2}{1}$ donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\,\ell n\, 2$

$f(16)=\dfrac{\ell n\, 16}{16}=\dfrac{\ell n\,(2^4)}{16}=\dfrac{4\,\ell n\, 2}{16}$ donc $f(16)=\dfrac{\ell n\, 2}{4}$

3°) On en déduit le tableau de variations de f sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;16\right]$:

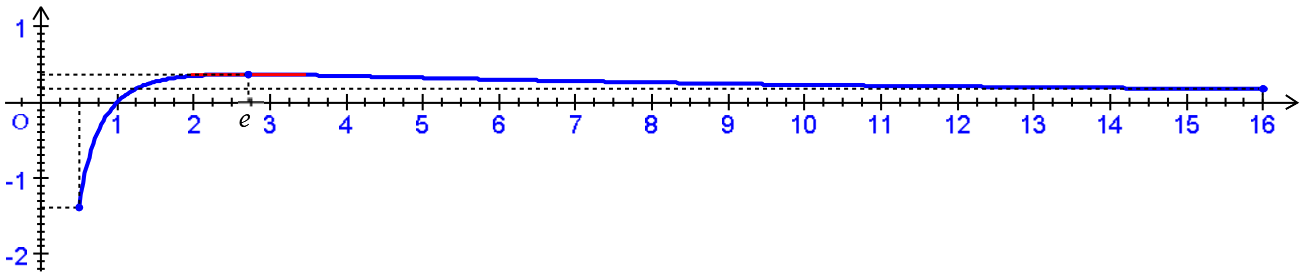
On a $f(e)=\dfrac{\ell n\, e}{e}=\dfrac{1}{e}$

x	$\frac{1}{2}$		e		16
$f'(x)$		+	0	−	
f	$-2\ell n\, 2$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{\ell n\, 2}{4}$

4°) On trace la courbe dans un repère orthonormé.

On a $e\approx 2{,}72$; $\dfrac{1}{e}\approx 0{,}37$; $-2\,\ell n\, 2\approx -1{,}39$ et $\dfrac{\ell n\, 2}{4}\approx 0{,}17$

La courbe a, en son point d'abscisse e, une tangente parallèle à (Ox).



Exercice 20

1°) f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = [\ell n(x)]^2 + \ell n(x) - 2$

On sait que $(u^2)' = 2\,u' \times u$ et $(\ell n x)' = \dfrac{1}{x}$

Donc $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times (\ell n x) + \dfrac{1}{x} - 0$, c'est-à-dire $f'(x) = \dfrac{2\,\ell n(x) + 1}{x}$ pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$.

On peut écrire $f'(x) = \dfrac{1}{x}[2\,\ell n(x) + 1]$

On sait que $x \in\,]0\,;+\infty[$, donc $\dfrac{1}{x}$ est strictement positif.

On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $2\,\ell n(x) + 1$.

On a : $2\,\ell n(x) + 1 > 0 \iff 2\,\ell n x > -1 \iff \ell n x > -\dfrac{1}{2} \iff x > e^{-\frac{1}{2}}$

(car la fonction ℓn est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$)

De même on obtient : $2\,\ell n(x) + 1 < 0 \iff x < e^{-\frac{1}{2}}$ et $2\,\ell n(x) + 1 = 0 \iff x = e^{-\frac{1}{2}}$

On a donc :

$f'(x) > 0 \iff x > e^{-\frac{1}{2}}$; $f'(x) < 0 \iff 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$; $f'(x) = 0 \iff x = e^{-\frac{1}{2}}$

On en déduit que f est décroissante sur $\left]0\,; e^{-\frac{1}{2}}\right]$ et croissante sur $\left[e^{-\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$

2°) $X^2 + X - 2 = 0$ est une équation du second degré d'inconnue X.

On peut la résoudre en calculant son discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$

Les solutions de l'équation $X^2 + X - 2 = 0$ sont données par :

$X_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \dfrac{-1-3}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \dfrac{-1+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

L'équation $X^2 + X - 2 = 0$ a donc deux solutions qui sont $X_1 = -2$ et $X_2 = 1$

En posant $X = \ell n x$, l'équation $f(x) = 0$ peut s'écrire :

$[\ell n(x)]^2 + \ell n(x) - 2 = 0 \iff X^2 + X - 2 = 0 \iff X = -2$ ou $X = 1 \iff \ell n x = -2$ ou $\ell n x = 1$

$\iff x = e^{-2}$ ou $x = e$

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions qui sont $x_1 = e^{-2}$ et $x_2 = e$

3°) Sachant que $e^{-2} < e^{-\frac{1}{2}} < e$ on peut donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $[e^{-2}\,; e]$

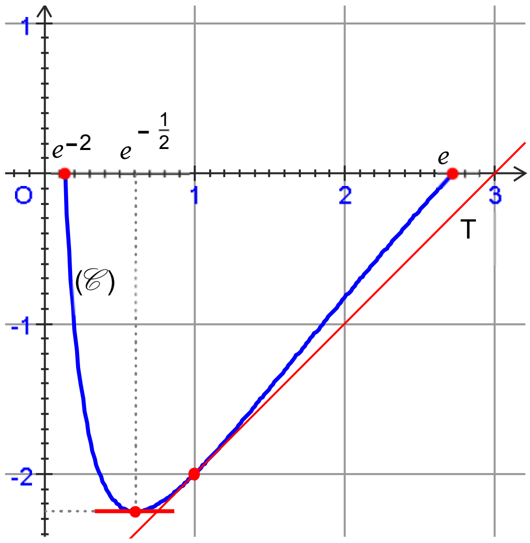
x	e^{-2}		$e^{-\frac{1}{2}}$		e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	0

On a :

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\ell n\, e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\ell n\, e^{-\frac{1}{2}}\right) - 2$

$= \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{9}{4}$

4°) La courbe ($\mathscr{C}$) représentative de f a une tangente horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}61$



5°) L'équation de la tangente T à ($\mathscr{C}$) en son point d'abscisse 1 est :

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

On a $f(1) = (\ell n\, 1)^2 + (\ell n\, 1) - 2 = -2$ et $f'(1) = \dfrac{2\,\ell n(1) + 1}{1} = 1$

Donc $y = 1\,(x - 1) - 2$ c'est-à-dire $y = x - 3$

Donc : T a pour équation $y = x - 3$.

On trace T sur le dessin précédent.

Exercice 22

On sait qu'une augmentation de t% correspond à une multiplication par $1 + \frac{t}{100}$.

La première année, l'augmentation est de 6%, les prix sont multipliés par $1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$

La deuxième année, l'augmentation est de 16%, les prix sont multipliés par : $1 + \frac{16}{100} = 1{,}16$

La troisième année, l'augmentation est de 5%, les prix sont multipliés par : $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$

Donc, sur les trois ans, les prix ont été multipliés par : $1{,}06 \times 1{,}16 \times 1{,}05 = 1{,}29108 = 1 + \frac{29{,}108}{100}$

On en déduit que : L'augmentation totale des prix sur les 3 ans est de 29,108% .

Si chaque année les prix avaient augmenté du même pourcentage t, chaque année les prix auraient été multipliés par $1 + \frac{t}{100}$.

Donc, au bout de trois ans, les prix auraient été multipliés par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3$.

On sait que les prix ont été multipliés par $1{,}06 \times 1{,}16 \times 1{,}05$

On a donc : $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 = 1{,}06 \times 1{,}16 \times 1{,}05$

On a donc : $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 = 1{,}29108$ donc $\left[\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} = 1{,}29108^{\frac{1}{3}}$ c'est-à-dire $1 + \frac{t}{100} = 1{,}29108^{\frac{1}{3}}$

On en déduit que : $\frac{t}{100} = 1{,}29108^{\frac{1}{3}} - 1$ donc $t = \left(1{,}29108^{\frac{1}{3}} - 1\right) \times 100$

On obtient : $t \approx 8{,}89$.

On peut dire que, pendant ces trois années, l'augmentation moyenne a été de 8,89% par an .

NB : On pourrait aussi écrire

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 = 1{,}29108 \iff \ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 = \ln 1{,}29108 \iff 3\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \ln 1{,}29108$$

$$\iff \ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{\ln 1{,}29108}{3} \iff 1 + \frac{t}{100} = e^{\frac{\ln 1{,}29108}{3}}$$

$$\iff \frac{t}{100} = e^{\frac{\ln 1{,}29108}{3}} - 1 \iff t = \left(e^{\frac{\ln 1{,}29108}{3}} - 1\right) \times 100$$

On retrouve ainsi $t \approx 8{,}89$.

Exercice 24

1°) a) Le nombre de salmonelles présentes dans cet aliment augmente de 50% toutes les heures, c'est-à-dire qu'il est multiplié par 1,5

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times 1{,}5$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,5

(u_n) étant une suite géométrique de raison 1,5 on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = u_0 \times 1{,}5^n$

On a donc $u_n = 100 \times 1{,}5^n$

b) Le nombre de salmonelles par gramme au bout de 12 heures correspond à $u_{12} = 100 \times 1{,}5^{12}$

On a $100 \times 1{,}5^{12} \approx 12\,975$

Au bout de 12 heures, le nombre de salmonelles par gramme dans l'aliment correspond à 12 975 .

c) On peut écrire $u_n = 100\,000 \iff 100 \times 1{,}5^n = 100\,000 \iff 1{,}5^n = 1\,000 \iff \ell n(1{,}5^n) = \ell n\,1\,000$

$$\iff n\,\ell n\,1{,}5 = \ell n\,1\,000 \iff n = \frac{\ell n\,1000}{\ell n\,1{,}5}$$

On a $\dfrac{\ell n\,1000}{\ell n\,1{,}5} \approx 17$

L'aliment est impropre à la consommation au bout de 17 heures.

2°) a) On peut écrire $x^{72} \leqslant 1\,000 \iff \ell n(x^{72}) \leqslant \ell n\,1\,000$ (car la fonction ℓn est croissante)

$$\iff 72\,\ell n\,x \leqslant \ell n\,1000 \iff \ell n\,x \leqslant \frac{\ell n\,1000}{72}$$

$$\iff x \leqslant e^{\frac{\ell n\,1\,000}{72}}$$ (car la fonction exponentielle est croissante)

On a donc $x^{72} \leqslant 1\,000 \iff x \leqslant e^{\frac{\ell n\,1\,000}{72}}$

b) À la température T_2, le nombre de salmonelles présentes dans cet aliment augmente de t% toutes les heures, c'est-à-dire qu'il est multiplié par $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$.

Après 72 heures à la température T_2, le nombre de salmonelles a été multiplié par $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^{72}$.

Ce nombre de salmonelles, qui est de 100 à l'origine, ne doit pas être supérieur à 100 000, donc il ne doit pas être multiplié par plus de 1 000.

On doit donc avoir $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^{72} \leqslant 1\,000$

D'après la question précédente : $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^{72} \leqslant 1\,000 \iff 1 + \dfrac{t}{100} \leqslant e^{\frac{\ell n\,1\,000}{72}}$

$$\iff \frac{t}{100} \leqslant e^{\frac{\ell n\,1\,000}{72}} - 1 \iff t \leqslant 100\left(e^{\frac{\ell n\,1\,000}{72}} - 1\right)$$

Sachant que $100\left(e^{\frac{\ell n\,1\,000}{72}} - 1\right) \approx 10{,}07$ et que t est un entier, on obtient $t \leqslant 10$

Pour pouvoir être consommé après 72 heures à la température T_2, le nombre de bactéries doit augmenter au maximum de 10% par heure.

Exercice 25

1°) g est définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $g(x)=x^2-1+\ell n(x)$.
On sait que la fonction ℓn est croissante sur $]0\ ;+\infty[$,
donc pour $x\geqslant 1$ on a $\ell n(x)\geqslant \ell n(1)$ donc $\ell n(x)\geqslant 0$
D'autre part, pour $x\geqslant 1$ on a $x^2-1\geqslant 0$ (car la fonction carré est croissante sur $[0\ ;+\infty[$).
On en déduit que $g(x)\geqslant 0$ pour tout $x\geqslant 1$. Donc g est positive sur $[1\ ;+\infty[$.

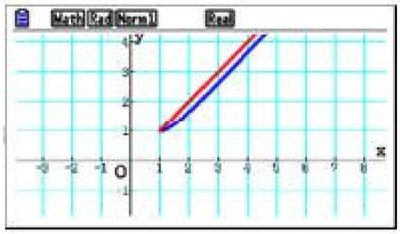
2°) a) f est définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{\ell n(x)}{x}$.

f est dérivable sur $[1\ ;+\infty[$ et on a $f'(x)=1-\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ell n(x)\times 1}{x^2}=1-\dfrac{1-\ell n(x)}{x^2}=\dfrac{x^2-1+\ell n(x)}{x^2}$

Pour tout x de $[1\ ;+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Sachant que pour tout $x\in[1\ ;+\infty[$ $g(x)\geqslant 0$ et que $x^2>0$, on a $f'(x)\geqslant 0$.
On en déduit que f est croissante sur $[1\ ;+\infty[$.

c) Pour tout $x\in[1\ ;+\infty[$ on a $f(x)-x=-\dfrac{\ell n(x)}{x}$.



Pour $x\geqslant 1$ on a $\ell n(x)\geqslant 0$ et $x>0$; on en déduit que $-\dfrac{\ell n(x)}{x}\leqslant 0$.

Par conséquent $f(x)-x\leqslant 0$ c'est-à-dire $f(x)\leqslant x$.
On en déduit que la courbe $(\mathscr{C})$ se trouve au-dessous de la droite D d'équation $y=x$.

NB : On peut vérifier le résultat en traçant la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite D avec une calculatrice.

3°) a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,
M_k est le point d'abscisse k de $(\mathscr{C})$, donc M_k a pour ordonnée $f(k)$ car $(\mathscr{C})$ a pour équation $y=f(x)$.
N_k est le point d'abscisse k de D, donc N_k a pour ordonnée k car D a pour équation $y=x$.
Comme on sait que $(\mathscr{C})$ est au-dessous de D, on a
$M_kN_k=k-f(k)=k-\left(k-\dfrac{\ell n(k)}{k}\right)$ donc $M_kN_k=\dfrac{\ell n(k)}{k}$ pour tout entier $k\geqslant 2$.

b) On complète le tableau :

p	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\dfrac{\ell n(p)}{p}$	0,322	0,230	0,181	0,150	0,129	0,113	0,102	0,092	0,085	0,078

D'après ce tableau $\dfrac{\ell n(p)}{p}$ est inférieur à 0,1 pour les valeurs 40 ; 45 et 50 de p.
Donc il existe au moins un entier p pour lequel la distance M_pN_p est inférieure à 0,1.

c) L'algorithme ci-contre permet de déterminer le plus petit entier q supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_qN_q soit inférieure ou égale à 10^{-2}.
NB : L'algorithme est réalisé avec Algobox pour lequel la fonction logarithme népérien est notée log (c'est une notation inhabituelle en mathématiques mais courante dans les langages de programmation).

On obtient $q=648$