Devoir Surveillé n°5

Terminale ES/L

Fonctions logarithme , exponentielle et suites

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice <u>*est autorisé*</u>.

Exercice 1. Un peu de suites — 6 points

Les suites (u_n) et (a_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 750 \\ u_{n+1} & = 0{,}95 \times u_n + 10 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (a_n) : \begin{cases} a_0 & \\ a_n & = u_n - 200 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

2. En déduire l'expression de a_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 550 \times 0,95^n + 200$$

3. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n < 201$.

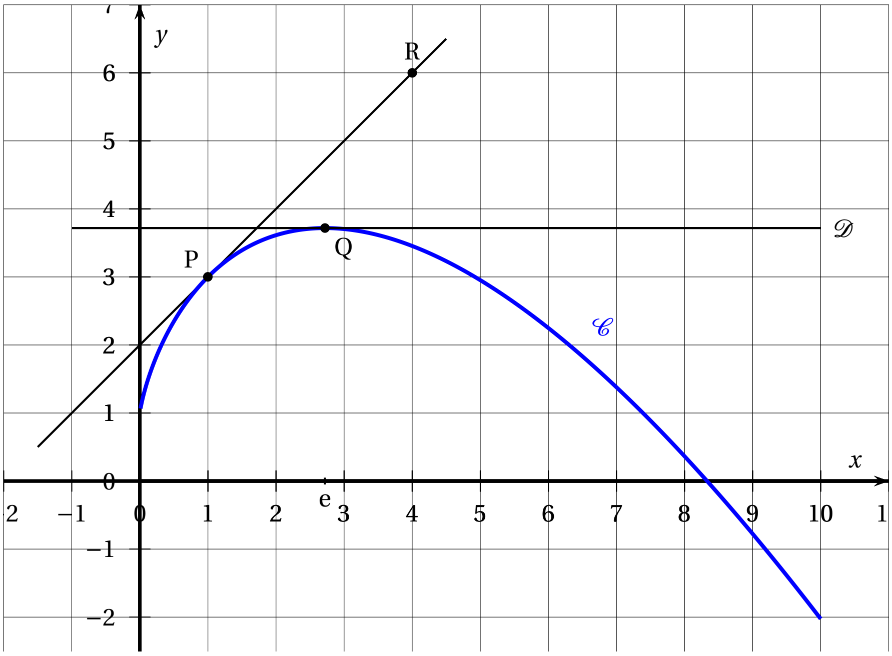
4. Compléter cet algorithme afin qu'il réponde à la question posée :

Pseudo Code

$u \leftarrow 750$
$n \leftarrow 0$
Tant que $\cdots\cdots\cdots\cdots$ Faire
    $n \leftarrow n+1$
    $u \leftarrow \cdots\cdots$
Fin Tant que
Afficher $\cdots\cdots$

Exercice 2. 14 points

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé d'origine O est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.



On considère les points P $(1\,;\,3)$ et R $(4\,;\,6)$. Le point Q a pour abscisse e, avec $e \approx 2{,}718$.
Les points P et Q appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q.
La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe au point Q.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les résultats seront donnés à l'aide d'une lecture graphique et sans justification.

1. Parmi les trois propositions ci-dessous, quelle est celle qui désigne l'équation de la droite (PR) ?
   a. $y = 2x + 1$ **b.** $y = x + 2$ **c.** $y = 2x + 2$
2. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Une seule de ces trois propositions est exacte, Laquelle ? :
   3. a. f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,10]$;
   3. b. f est concave sur l'intervalle $]0\,;\,10]$
   3. c. f n'est ni convexe ni concave sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

Partie B

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = -x\ln x + 2x + 1.$$

1.
   1. a. Montrer que pour x de l'intervalle $]0\,;\,10]$ on a : $f'(x) = 1 - \ln x$.
   1. b. Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
   1. c. Calculer la valeur exacte du maximum de la fonction f sur ce même intervalle.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[e\,;10]$ et déterminer un encadrement de α au centième.
4. *Bonus : Montrer que :* $\ln\alpha = 2 + \dfrac{1}{\alpha}$.

Fin du devoir