Devoir Surveillé n°1
Terminale ES/L
Suites
Durée 2 heures - Coeff. 8
Noté sur 20 points

Exercice 1. Validation des "Savoir Faire" — 8 points

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 100 \\ a_{n+1} & = 0{,}2 \times a_n + 12 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = -a_n + 15 \end{cases}$$

1. Déterminer les trois premiers termes des suites (a_n) et (b_n).

2. Montrer que la suite (b_n) est géométrique de raison $0,2$ et de premier terme $b_0 = -85$. En déduire son terme général.

3. Établir le sens de variation de la suite (b_n).

4. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots b_n = -21,25 \times (1 - 0,2^n)$$

5. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \, ; \; a_n = 85 \times (0{,}2)^n + 15$$

6. Déterminer les limites des suites (a_n) et (S_n).

7. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels avec la calculatrice l'inégalité :

$$a_n < 15,004$$

8. Recopier et compléter sur votre copie les lignes incomplètes de cet algorithme afin qu'il affiche le résultat de la question précédente **(7.)**.

Variables :	n est un entier naturel
	a est un nombre réel
Traitement :	Affecter à a la valeur 100
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $\cdots\cdots\cdots\cdots$ faire
	$\quad$ a prend la valeur $\cdots\cdots\cdots\cdots$
	$\quad$ n prend la valeur $\cdots\cdots\cdots\cdots$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $\cdots\cdots\cdots\cdots$

Exercice 2. D'après Bac 5 points

Commun à tous les candidats

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent. En 2012, la ville comptait 40 000 habitants. On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012+n$. On a donc $U_0 = 40\,000$. On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\,200$$

On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$V_n = U_n - 9\,600$$

Les questions numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées : une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

Question 1

La valeur de U_1 est :

a. 6 200 **b.** 35 000 **c.** 36 200 **d.** 46 200

Question 2

La suite (V_n) est :

a. géométrique de raison $-12,5\%$

b. géométrique de raison $0,875$

c. géométrique de raison $-0,875$

d. arithmétique de raison $-9\,600$

Question 3

La suite (U_n) a pour limite :

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 1 200 **d.** 9 600

Question 4

On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES :
    U, N
INITIALISATION :
    U prend la valeur 40 000
    N prend la valeur 0
TRAITEMENT :
    Tant que U > 10 000
        N prend la valeur N + 1
        U prend la valeur 0,875 × U + 1 200
    Fin du Tant que
SORTIE :
    Afficher N
```

Cet algorithme permet d'obtenir :

a. la valeur de $U_{40\,000}$

b. toutes les valeurs de U_0 à U_N

c. le plus petit rang n pour lequel on a $U_n \leqslant 10\,000$

d. le nombre de termes inférieurs à 1 200

Question 5

La valeur affichée est :

a. 33 **b.** 34 **c.** 9 600 **d.** 9 970,8

Exercice 3. D'après Bac 2015 — 7 points

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.
Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel
	C est un nombre réel
Traitement :	Affecter à C la valeur 300
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $C < 400$ faire
	C prend la valeur $C - C \times 0,08 + 50$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

1. a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 400$		vrai		$\dots$
Valeur de C	300	326		$\dots$
Valeur de n	0	1		$\dots$

1. b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

2. a. Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n.

2. b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par :

$$V_n = 625 - C_n$$

Montrer que pour tout nombre entier n on a :

$$V_{n+1} = 0,92 \times V_n$$

2. c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$$

2. d. Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?

3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

3. a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?

3. b. Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

- Fin du devoir -

Bonus
Montrer que :

$$1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{11^4} + \cdots = \frac{11}{10}$$