# Devoir Surveillé n°5

# Terminale ES/L

## Fonctions logarithme et exponentielle

**Durée 2 heures - Coeff. 8**

**Noté sur 20 points**

---

*L'usage de la calculatrice <u>est autorisé</u>.*

## Exercice 1. 7 points

*Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment*

Un artisan glacier commercialise des « sorbets bio ». Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.

Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction $f$ définie pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $\text{I} = ]0\,;\,3]$ par

$$f(x) = 10x^2 - 20x\ln x.$$

Lorsque $x$ représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros.

La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction $r$ définie sur le même intervalle I.

### Partie A

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f$ et la droite $D$ représentative de la fonction linéaire $r$ sont données en **annexe**.

**1.** Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.

**1. a.** Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.

**1. b.** Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de $x$.

**1. c.** Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?

### Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de $x$ centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout $x$ de l'intervalle $[1\,;\,3]$, on a :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$$

où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

**1.** On note $B'$ la fonction dérivée de la fonction $B$. Montrer que, pour tout nombre $x$ de l'intervalle $[1\,;\,3]$, on a :

$$B'(x) = -20x + 20\ln x + 30$$

**2.** On donne le tableau de variation de la fonction dérivée $B'$ sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.

| $x$ | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|
| Variations de $B'$ | $B'(1)$ | $\searrow$ | $B'(3)$ |

**2. a.** Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[1\,;\,3]$. Donner une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$.

**2. b.** En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction $B$ sur ce même intervalle.

**3.** L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

## Exercice 2. Les suites, comme au Bac — 5 points

Les suites $(u_n)$ et $(w_n)$ sont définies pour tout entier $n$ par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = 0{,}9 \times u_n + 2 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (w_n) : \begin{cases} w_0 & \\ w_n & = u_n - 20 \end{cases}$$

**1.** Montrer que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

**2.** En déduire l'expression de $w_n$ en fonction de $n$ puis montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \, ; \; u_n = -19 \times (0{,}9)^n + 20$$

**3.** Donner la limite de la suite $(u_n)$.

**4.** Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 19$.

**5.** *[Bonus] Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.*

## Exercice 3. Position relative — 2 points

On considère la fonction $f$ définie sur $]0 \, ; \, +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) - 2x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et $T$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $T$ ?

## Exercice 4. Position relative ... encore ! — 6 points

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}.$$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé du plan. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ et $f''$ la fonction dérivée seconde de $f$.

**1.**

**1. a.** Montrer que pour tout réel $x$ :

$$f'(x) = \left(2x^2 + 1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$$

**1. b.** En déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** On admet que pour tout réel $x$ :

$$f''(x) = 2x\left(2x^2 + 3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$$

Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction $f$ est convexe.

**3.** Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x\left(1 - \mathrm{e}^{x^2-1}\right).$$

**3. a.** Justifier que l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1 \, ; \, 1]$.

**3. b.** Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1 \, ; \, 1]$.

**3. c.** En remarquant que pour tout réel $x$, on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $D$ d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0 \, ; \, 1]$.

**Fin du devoir**

## ANNEXE à l'exercice 1