DÉRIVÉES
FONCTIONS CONVEXES

I Dérivées - Rappels

Définition

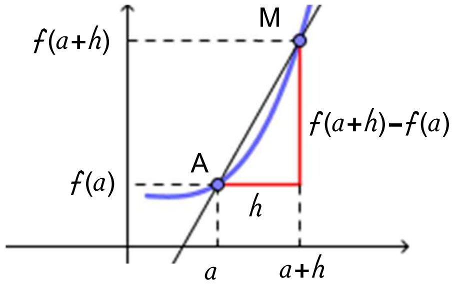
(voir animation)

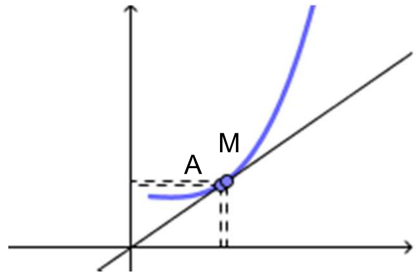
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in$ I et soit h non nul tel que $a + h \in$ I.

- On appelle taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ le nombre $\mathrm{T}(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Si A est le point de la courbe de f d'abscisse a et M le point de la courbe de f d'abscisse $a + h$, T(h) est le coefficient directeur de la droite (AM).
- Si le taux d'accroissement T(h) de f entre a et $a + h$ tend vers un nombre réel quand h tend vers 0, ce nombre réel est appelé nombre dérivé de f en a et il est noté $f'(a)$.
  On dira alors que f est dérivable en a.

  On pourra écrire $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \mathrm{T}(h)$

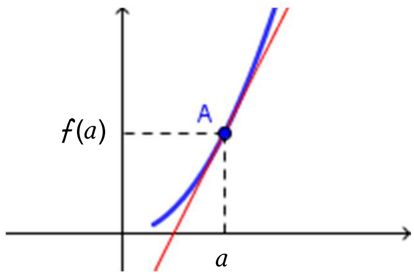
  c'est-à-dire $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$





Définition - Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in$ I .
Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
La droite T passant par A(a ; $f(a)$) et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée tangente à $(\mathscr{C})$ en A.
Cette tangente T a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Cas particulier

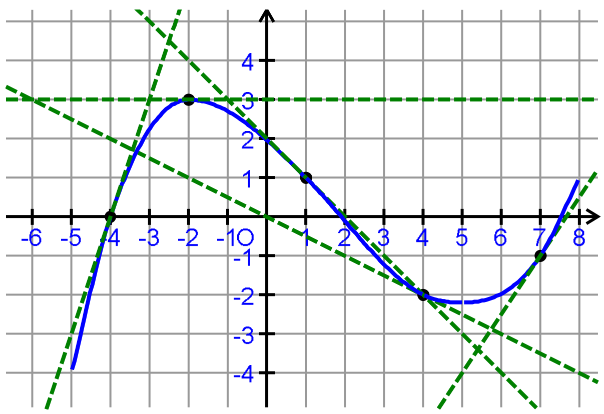
Si $f'(a) = 0$, T est parallèle à l'axe des abscisses (horizontale).

Exercice 01

La courbe ci-contre représente une fonction f.
Toutes les droites tracées sont tangentes à la courbe.
Déterminer à partir de ce graphique :

$f(-4)$; $f(-2)$; $f(1)$; $f(4)$; $f(7)$

$f'(-4)$; $f'(-2)$; $f'(1)$; $f'(4)$; $f'(7)$



Définition

Si une fonction f est dérivable en tout x d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
L'application qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f.
La fonction dérivée de f est notée f'.

Remarque

Si f' est elle-même dérivable, on dit que f est deux fois dérivable.
La dérivée de f' sera notée f'', on l'appelle dérivée seconde de f.

Dérivées des fonctions usuelles

On donne ci-dessous les dérivées de fonctions rencontrées couramment.

Fonction	Dérivée	Ensemble
$f(x)=k$ (k constante)	$f'(x)=0$	IR
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	IR
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	IR
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	IR
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$	IR
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x)=x^n \quad n\in \mathbb{N} \quad n\neq 0$	$f'(x)=nx^{n-1}$	IR
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	IR
$f(x)=\ell n(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$

Propriété

- Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u+v$ est dérivable sur I et on a $(u+v)'=u'+v'$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et k un réel (une constante), alors la fonction ku est dérivable sur I et on a $(ku)'=k\,u'$
- Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u\times v$ est dérivable sur I et on a $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si u ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et on a $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
- Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

Exercice 02

Pour chacune des fonctions ci-dessous, calculer sa dérivée et sa dérivée seconde.

$f(x)=-\frac{1}{6}x^4+\frac{5}{2}x^3+5x+10$ $\qquad g(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$

$h(x)=(3-x)e^x+1$ $\qquad p(x)=\frac{\ell n(x)}{x}$

$q(x)=-0{,}5x^2+6x-20+2x\,\ell n(x)$ $\qquad r(x)=(3x-4)e^{-x}+2$

Vérifier les résultats avec un logiciel de calcul formel.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est positive ou nulle sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est négative ou nulle sur I, alors f est décroissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

II Fonctions convexes

Exercice 03

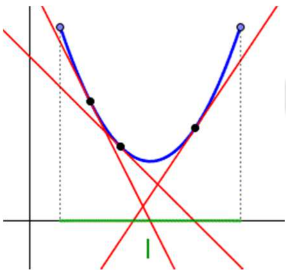
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

1°) a) En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la représentation graphique de f.
   b) Créer un point A sur la courbe de f.
   c) Tracer la tangente T à la courbe au point A. On pourra, pour cela, utiliser l'outils "Tangentes" et cliquer successivement sur la courbe puis sur le point A.
   d) En déplaçant le point A sur la courbe, vérifier que la courbe est toujours entièrement située au-dessus de la tangente T. On dit alors que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

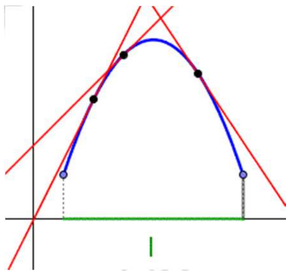
2°) Modifier l'expression de la fonction pour la remplacer par $f(x) = x^3$.
   La fonction $f : x \mapsto x^3$ est-elle une fonction convexe sur $\mathbb{R}$?

Définition

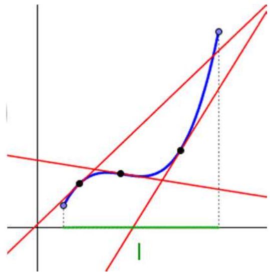
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
On dit que f est convexe sur I si sa courbe représentative sur I est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
On dit que f est concave sur I si sa courbe représentative sur I est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.



La fonction est convexe sur l'intervalle I



La fonction est concave sur l'intervalle I



La fonction n'est ni convexe ni concave sur l'intervalle I
Mais elle est concave sur un premier intervalle
puis convexe sur un deuxième intervalle

Exemples

La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^3$ est une fonction concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.

(voir exercice 03)

Exercice 04

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

1°) En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la représentation graphique de f.
2°) Créer un point A sur la courbe de f.
3°) Tracer la tangente T à la courbe au point A. On pourra, pour cela, utiliser l'outils "Tangentes" et cliquer successivement sur la courbe puis sur le point A.
4°) Déplacer le point A sur la courbe. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Exercice 05

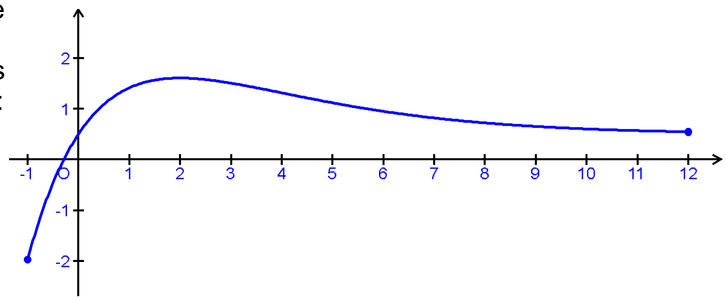
En utilisant les représentations graphiques obtenues avec une calculatrice ou un ordinateur, que peut-on dire des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ell n(x)$ du point de vue des notions de convexité et de concavité ?

Remarques

- La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction concave sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \ell n(x)$ est une fonction concave sur $]0;+\infty[$.

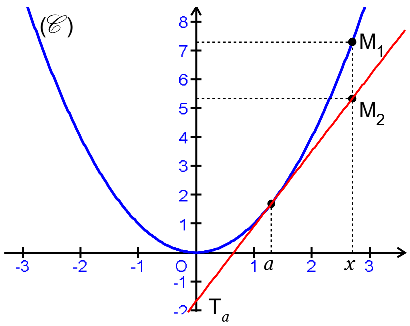
Exercice 06

On considère la fonction f représentée graphiquement ci-contre.
Indiquer, à partir de ce graphique si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :
1°) f est convexe sur $[-1 ; 1]$.
2°) f est convexe sur $[7 ; 12]$.
3°) f est concave sur $[0 ; 3]$.
4°) f est convexe sur $[2 ; 12]$.
5°) f est concave sur $[-1 ; 6]$.



Exercice 07

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative (voir dessin ci-contre).
Soit $a \in \mathbb{R}$.



1°) Donner l'équation de la tangente T_a à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$; M_1 le point d'abscisse x sur la courbe $(\mathscr{C})$ et M_2 le point d'abscisse x sur la tangente T_a
Soit y_1 l'ordonnée de M_1 et y_2 l'ordonnée de M_2
Justifier que $y_1 - y_2 = x^2 - 2ax + a^2$

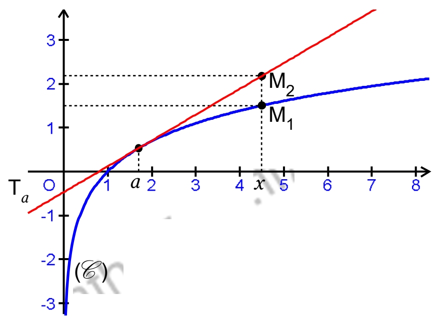
3°) On appelle g la fonction qui à x réel associe $g(x) = x^2 - 2ax + a^2$
Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. En déduire que g a un minimum que l'on déterminera.
Justifier que $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4°) Justifier que $(\mathscr{C})$ est au-dessus de sa tangente T_a .

5°) Justifier que f est une fonction convexe.

Exercice 08

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ell n\ (x)$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative (voir dessin ci-contre).
Soit $a \in]0;+\infty[$.



1°) Donner l'équation de la tangente T_a à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a.

2°) Soit $x \in]0;+\infty[$; M_1 le point d'abscisse x sur la courbe $(\mathscr{C})$ et M_2 le point d'abscisse x sur la tangente T_a
Soit y_1 l'ordonnée de M_1 et y_2 l'ordonnée de M_2
Justifier que $y_1 - y_2 = \ell n(x) - \ell n(a) - \dfrac{1}{a} \times x + 1$

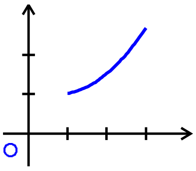
3°) On appelle g la fonction qui à x dans $]0;+\infty[$ associe $g(x) = \ell n(x) - \ell n(a) - \dfrac{1}{a} \times x + 1$
Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. En déduire que g a un maximum que l'on déterminera.
Justifier que $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

4°) Justifier que $(\mathscr{C})$ est au-dessous de sa tangente T_a .

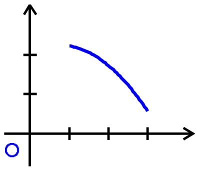
5°) Justifier que f est une fonction concave.

Exercice 09

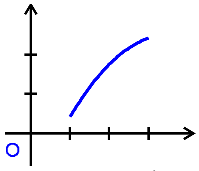
En considérant les représentations graphiques ci-dessous étudier pour chacune des fonctions son sens de variation puis sa concavité ou sa convexité.



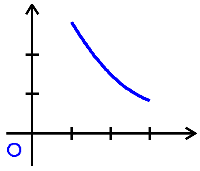
fonction f



fonction g



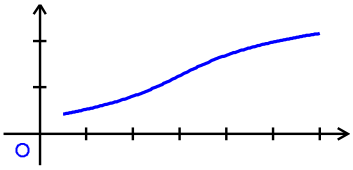
fonction h



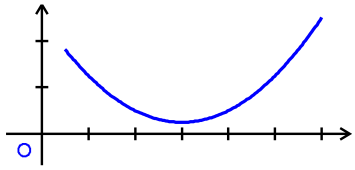
fonction r

Remarque

Une fonction croissante sur un intervalle I peut être convexe sur I, concave sur I ou ni convexe ni concave sur I. Il en est de même pour une fonction décroissante sur un intervalle I.
Une fonction convexe sur un intervalle I peut être croissante sur I, décroissante sur I, ni croissante ni décroissante sur I. Il en est de même pour une fonction concave sur un intervalle I.



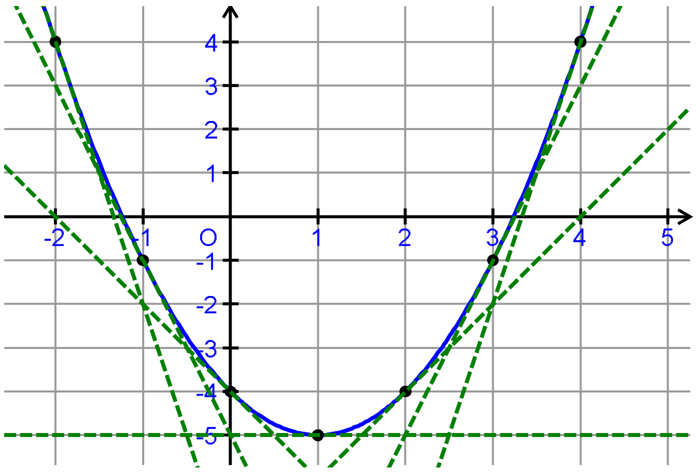
fonction croissante sur un intervalle I
ni convexe ni concave sur I



fonction convexe sur un intervalle I
ni croissante ni décroissante sur I

Exercice 10

Sur le graphique ci-contre est représentée une fonction f dérivable sur $[-2 ; 4]$ et quelques-unes des tangentes à sa courbe.



1°) D'après le graphique, la fonction f est-elle :
convexe sur $[-2 ; 4]$?
concave sur $[-2 ; 4]$?
ni convexe ni concave sur $[-2 ; 4]$?

2°) On rappelle que la courbe ($\mathscr{C}$) d'une fonction f, dérivable sur un intervalle I, a, en son point d'abscisse $a \in$ I, une tangente de coefficient directeur $f'(a)$.
En lisant graphiquement les coefficients directeurs des tangentes, compléter le tableau suivant :

a	-2	-1	0	1	2	3	4
$f'(a)$							

Constater que les valeurs de a et de $f'(a)$ varient dans le même sens (lorsque a augmente, $f'(a)$ augmente). Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de f' ?

Exercice 11

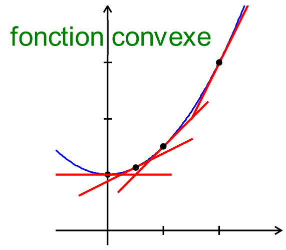
On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 0{,}05\,x^4 + 0{,}1\,x^3 + 0{,}1\,x^2$
1°) En utilisant le logiciel GeoGebra, tracer la représentation graphique de f.
2°) Créer un point A sur la courbe de f et tracer la tangente T à la courbe au point A. On pourra, pour cela, utiliser l'outils "Tangentes" et cliquer successivement sur la courbe puis sur le point A.
3°) En déplaçant le point A sur la courbe, étudier la convexité de f et compléter le tableau suivant :

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(a)$							

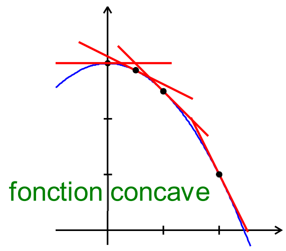
4°) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
Justifier que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in$ IR.
En déduire que la fonction f' est croissante sur IR.

Remarque

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.
Lorsque x augmente, le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x augmente (sur le dessin, la tangente devient de plus en plus verticale dirigée vers le haut) ;
c'est-à-dire que le nombre dérivé $f'(x)$ augmente lorsque x augmente ;
c'est-à-dire que la fonction f' est croissante.



De même, soit f une fonction concave sur I.
Lorsque x augmente, le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x diminue ;
c'est-à-dire que le nombre dérivé $f'(x)$ diminue lorsque x augmente ;
c'est-à-dire que la fonction f' est décroissante.



Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I.
f est concave sur I si et seulement si sa dérivée f' est décroissante sur I.

Exercice 12

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$
Calculer $f'(x)$ et donner le sens de variation de f'.
Retrouver ainsi que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

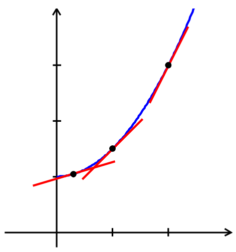
Exercice 13

Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ell n(x)$
1°) Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$.
2°) Étudier le signe de f'' et en déduire le sens de variation de f'.
Retrouver ainsi que la fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;+\infty[$.

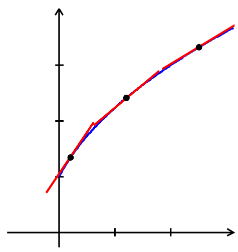
Propriété

Soit f une fonction ayant une dérivée seconde sur un intervalle I.
Si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in$ I alors f est convexe sur I.
Si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in$ I alors f est concave sur I.

Remarque



Lorsqu'une fonction croissante est convexe,
on peut dire qu'elle croît de plus en plus.
(sa fonction dérivée est croissante)



Lorsqu'une fonction croissante est concave,
on peut dire qu'elle croît de moins en moins.
(sa fonction dérivée est décroissante)

Exercice 14

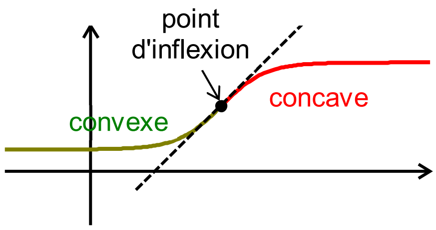
On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x[\ell n(x) - 1]$
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T ?

Exercice 15

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
1°) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2°) Démontrer que f est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.
3°) Justifier que la tangente à $(\mathscr{C})$ en O est l'axe des abscisses. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
Le point O est un point où la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f traverse sa tangente.
On dit que O est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C})$.

Définition

Soit f une fonction dérivable et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique.
On appelle point d'inflexion de $(\mathscr{C})$ tout point de $(\mathscr{C})$ où la courbe traverse sa tangente.

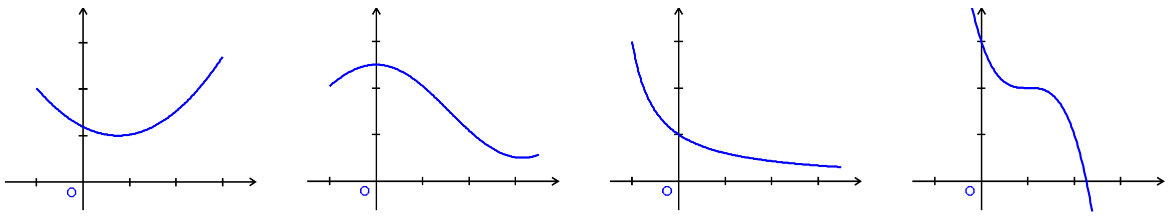


Remarque

Un point d'inflexion est un point où la fonction "passe de concave à convexe" ou "passe de convexe à concave".

Exercice 16

Parmi les courbes ci-dessous, indiquer celles qui ont un point d'inflexion et placer approximativement ce point d'inflexion sur le graphique.



Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2$
1°) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f''(x) = (3x - 10)e^{-x}$
2°) Étudier le signe de $f''(x)$ et déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
3°) Montrer que la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse. Vérifier en traçant la courbe avec une calculatrice ou un ordinateur.

Propriété

Soit f une fonction ayant une dérivée seconde sur un intervalle I.
Si f'' s'annule en changeant de signe en a, alors le point A d'abscisse a de la courbe de f est un point d'inflexion.

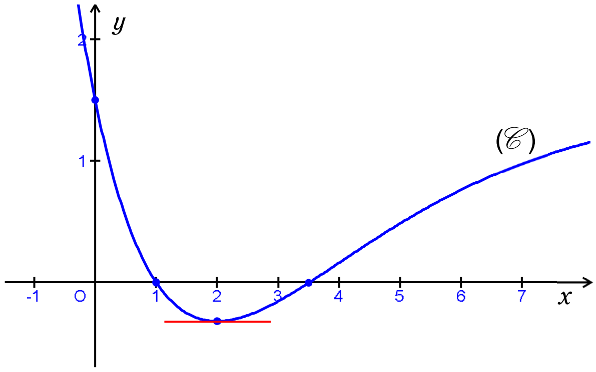
Remarque

Si f'' s'annule en changeant de signe en a, alors f' change de sens de variation en a, c'est-à-dire que la fonction f "passe de concave à convexe" ou "passe de convexe à concave".

Exercice 18

Indiquer dans chacun des cas le nombre de points d'inflexion de la courbe de la fonction f.
Indiquer l'abscisse de chacun des points d'inflexion éventuels.
1°) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 5$
2°) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$
3°) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$
4°) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^2 - 2x - 5$
5°) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + x^3 + x^2$
6°) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$
7°) f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$
8°) f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + \ln(x) - 1$

Exercice 19



f est une fonction deux fois dérivable sur IR.
La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f est donnée ci-contre.
$(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses respectives 1 et 3,5
$(\mathscr{C})$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1,5.
$(\mathscr{C})$ a une tangente parallèle à Ox au point d'abscisse 2.
Indiquer, à partir de ce graphique si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :

1°) La courbe (Γ) de f a un point d'inflexion d'abscisse 0
2°) La courbe (Γ) de f a un point d'inflexion d'abscisse 1
3°) La courbe (Γ) de f a un point d'inflexion d'abscisse 2
4°) f est convexe sur l'intervalle $[0 ; 2]$
5°) f est concave sur $[1 ; 3{,}5]$

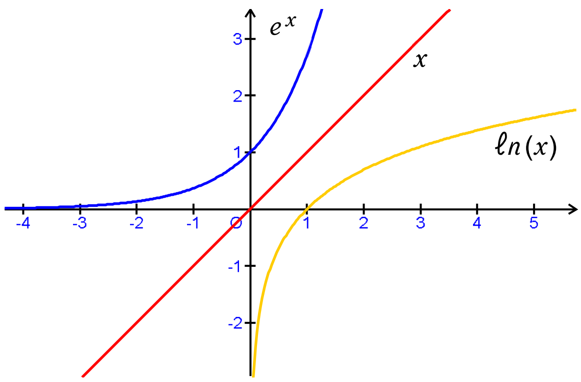
Exercice 20

On considère les droites T ; T_1 et T_2 d'équations respectives $y = x$; $y = x + 1$; $y = x - 1$.

1°) Tracer les trois droites sur un dessin et indiquer leurs positions relatives.
2°) Soit C_1 la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$
Justifier que C_1 a pour tangente en son point d'abscisse 0 la droite T_1.
En déduire que la courbe C_1 est entièrement située au-dessus de la droite T_1 et tracer C_1 sur le dessin.
3°) Soit C_2 la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ell n(x)$
Justifier que C_2 a pour tangente en son point d'abscisse 1 la droite T_2.
En déduire que la courbe C_2 est entièrement située au-dessous de la droite T_2 et tracer C_2 sur le dessin.
4°) En déduire les positions relatives de C_1 ; C_2 ; T_1 ; T_2 et T.

Remarque

La courbe de la fonction $x \mapsto e^x$ est entièrement située au-dessus de la droite représentant la fonction $x \mapsto x$ qui est elle-même entièrement située au-dessus de la courbe de la fonction $x \mapsto \ell n(x)$



Exercice 21

On considère la fonction f définie sur R par :
$f(x) = -2(x + 2)\, e^{-x}$

1°) Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2°) Dans le repère orthogonal ci-contre trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont été représentées.
L'une de ces courbes représente f une autre représente sa dérivée et la troisième représente sa dérivée seconde.
a) Indiquer, en justifiant, la courbe représentant la fonction f, celle représentant f' et celle représentant f''.
b) Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f.
c) La courbe de f a-t-elle un point d'inflexion ? Si c'est le cas, donner l'abscisse de ce point.