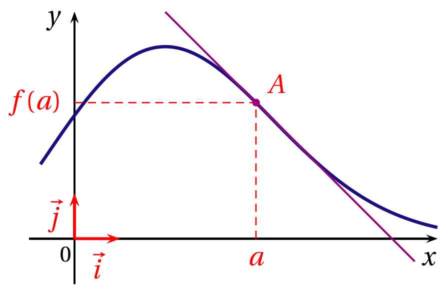
## Chapitre 2

# DÉRIVATION, CONTINUITÉ ET CONVEXITÉ

# I DÉRIVÉES

## 1 TANGENTE À UNE COURBE




Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, dérivable en $a$ où $a$ est un réel de $I$, et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
La droite passant par le point $A\left(a; f(a)\right)$ de la courbe $C_f$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $a$.

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, dérivable en $a$ où $a$ est un réel de $I$, et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
L'équation réduite de la tangente à la courbe $C_f$ au point $A$ d'abscisse $a$ est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

## 2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

| $f$ définie sur ... | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f$ dérivable sur ... |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $k$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}$ | $ax+b$ | $a$ | $\mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ pour $n$ entier $n \geqslant 2$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $\dfrac{1}{x^n}$ | $-\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R}^*$ pour $n$ entier $n \geqslant 1$ |
| $[0;+\infty[$ | $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |

## 3 DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ :

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(ku)' = k \times u'$
- $(uv)' = u'v + uv'$

- $\left(u^2\right)' = 2uu'$
- Si $n$ est un entier non nul, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Si la fonction $v$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I$ (si $v(x) \neq 0$ sur $I$)

- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

## 4 DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

### THÉORÈME 1

Soit $f$ une fonction dérivable et monotone sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

— Si $f$ est constante sur $I$, alors pour tout réel $x$ appartenant à $I$, $f'(x) = 0$.

— Si $f$ est croissante sur $I$, alors pour tout réel $x$ appartenant à $I$, $f'(x) \geqslant 0$.

— Si $f$ est décroissante sur $I$, alors pour tout réel $x$ appartenant à $I$, $f'(x) \leqslant 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

### THÉORÈME 2

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $f'$ la dérivée de $f$ sur $I$.

— Si $f'$ est nulle sur $I$, alors $f$ est constante sur $I$.

— Si $f'$ est strictement positive sur $I$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.

— Si $f'$ est strictement négative sur $I$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.

### THÉORÈME 3

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ et $x_0$ un réel appartenant à $I$.

1. Si $f$ admet un extremum local en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée $f'$ s'annule en $x_0$ **en changeant de signe**, alors $f$ admet un extremum local en $x_0$.

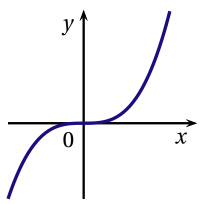
| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | *minimum* | $\nearrow$ | |

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | *maximum* | $\searrow$ | |

REMARQUES

1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

   Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
   $f'(0) = 0$ et pour tout réel $x$ non nul, $f'(x) > 0$.
   La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.

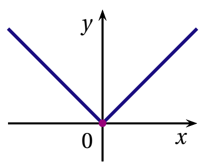



2. Une fonction peut admettre un extremum local en $x_0$ sans être nécessairement dérivable.

   Considérons la fonction valeur absolue $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

   $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

   $f$ admet un minimum $f(0) = 0$ or $f$ n'est pas dérivable en 0.



EXEMPLE : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.

   Sur $\mathbb{R}$ $f$ est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

   $f = 1 - \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = -\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel $x$,

$$\begin{array}{lll} u(x) = 4x-3 & \text{d'où} & u'(x) = 4 \\ v(x) = x^2+1 & \text{d'où} & v'(x) = 2x \end{array}$$

   Soit pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

   Ainsi, $f'$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

2. Étudier les variations de la fonction $f$

   Les variations de la fonction $f$ se déduisent du signe de sa dérivée.

   Étudions le signe de $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$ :

   Pour tout réel $x$, $(x^2+1)^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a = 4$, $b = -6$ et $c = -4$.

   Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ Soit

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 100$$

   Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$\begin{array}{lll} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{Soit} & x_1 = \dfrac{6-10}{8} = -\dfrac{1}{2} \\ \text{et } x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{Soit} & x_2 = \dfrac{6+10}{8} = 2 \end{array}$$

   Un polynôme du second degré est du signe de $a$ sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

   Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel $x$ ainsi que les variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

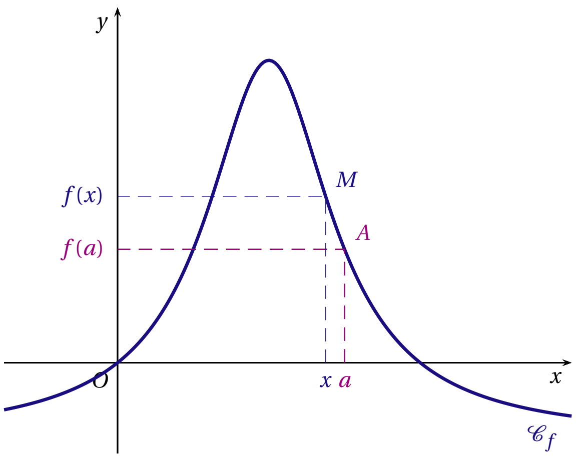
## II CONTINUITÉ

### 1 NOTION DE CONTINUITÉ

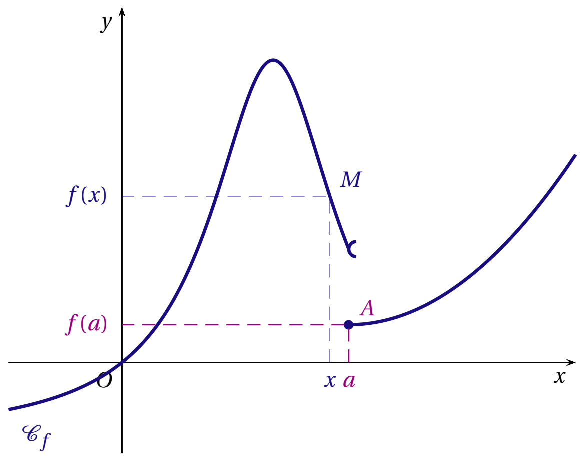
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
Intuitivement, dire que $f$ est continue sur $I$ signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un réel de $I$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ et $A$ le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $a$.
Pour tout réel $x$ de l'intervalle $I$, on considère le point $M$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x$




La fonction $f$ est continue.
Pour tout réel $a$ de $I$, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que $x$ soit suffisamment proche de $a$.




La fonction $f$ n'est pas continue en $a$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse $a$.
Le point $M$ n'est pas proche du point $A$ quand $x$ est proche de $a$.

### 2 PROPRIÉTÉS

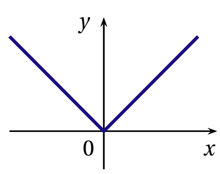
**THÉORÈME** (*admis*)

Toute fonction dérivable sur un intervalle $I$ est continue sur cet intervalle.

REMARQUE

La réciproque du théorème est fausse :

Une fonction peut être continue en un réel $a$ sans être dérivable en ce réel.
Par exemple la fonction valeur absolue $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est contine en 0 mais n'est pas dérivable en 0.




CONSÉQUENCES

On admettra les deux propriétés suivantes :

1. Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
2. Toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de fonctions de référence est continue sur tout intervalle où elle est définie.

## III CONTINUITÉ ET ÉQUATION

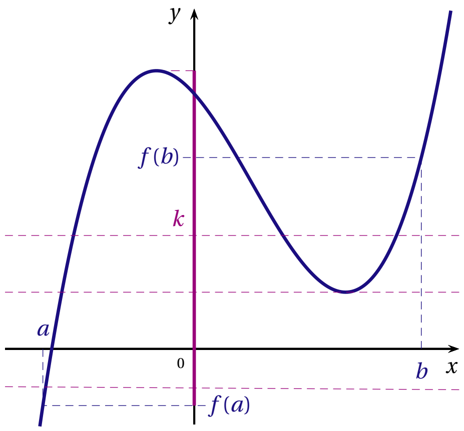
### 1 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

**THÉORÈME** (*admis*)

Si $f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ et continue sur $I$ alors elle vérifie la propriété suivante : quels que soient les réels $a$ et $b$ de l'intervalle $I$, pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $c$ appartenant à $[a; b]$.

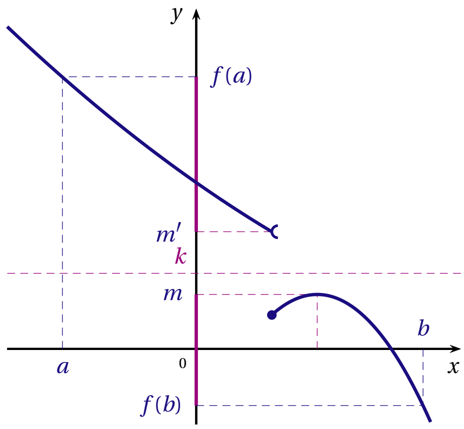
Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

**$f$ est continue sur $I$**




L'image de l'intervalle $[a; b]$ est un intervalle.
Tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a; b]$.

**$f$ n'est pas continue sur $I$**




L'image de l'intervalle $[a; b]$ n'est pas un intervalle.
Il existe des réels $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

### 2 THÉORÈME DE LA VALEUR INTERMÉDIAIRE

**COROLLAIRE**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $a$, $b$ deux réels appartenant à $I$, $a < b$.
Si $f$ est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution **unique** $c$ appartenant à $[a; b]$.

DÉMONSTRATION

Soit $k$ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$

1. Existence
   Par hypothèse, $f$ est continue sur $[a; b]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $c$ appartenant à $[a; b]$.
2. Unicité
   Supposons que l'équation $f(x) = k$ admette deux solutions distinctes $c_1$ et $c_2$ appartenant à $[a; b]$
   Par hypothèse, $f$ est strictement monotone sur $[a; b]$ alors $c_1 \neq c_2 \Rightarrow f(c_1) \neq f(c_2)$
   Ce qui aboutit à une contradiction puisque $f(c_1) = f(c_2) = k$
   Donc $c_1 = c_2$, ce qui prouve que l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a; b]$

REMARQUES

1. Si $f$ est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a; b]$
2. Le théorème s'applique aussi lorsque $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle de la forme $[a; b[$, $]a; b]$, $]a; b[$ , $[a; +\infty[$, $]a; +\infty[$ , $]-\infty; b]$ ou $]-\infty; b[$.

# IV CONVEXITÉ

## 1 FONCTION CONVEXE, FONCTION CONCAVE

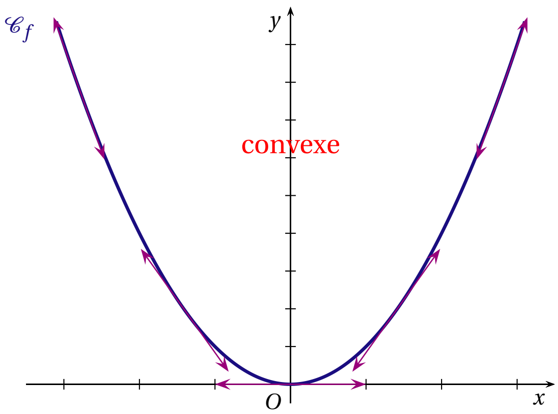
### DÉFINITIONS

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

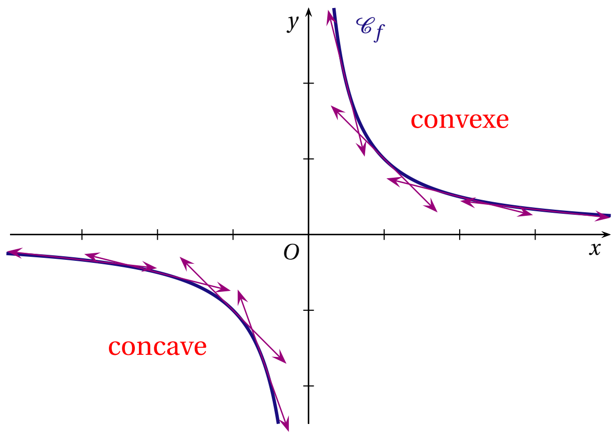
— Dire que la fonction $f$ est convexe sur $I$ signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

— Dire que la fonction $f$ est concave sur $I$ signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

### EXEMPLES




La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



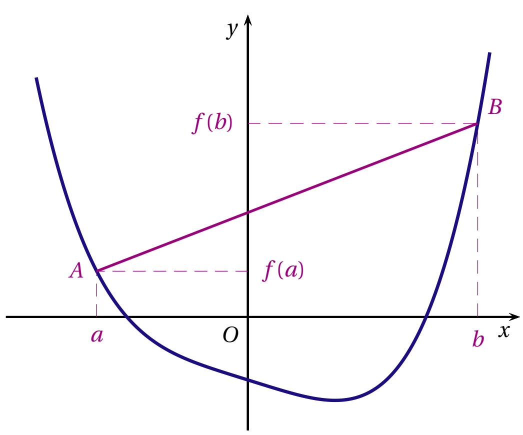

La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

### REMARQUE

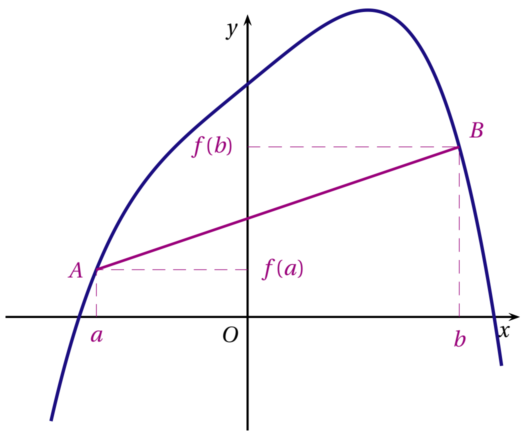
Intuitivement, quels que soient les points $A$ et $B$ de la courbe $\mathscr{C}_f$

— Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors $f$ est convexe.

— Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors $f$ est concave.




$f$ est convexe.




$f$ est concave

**THÉORÈME** (*admis*)

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$.

— $f$ est convexe sur $I$ si, et seulement si, sa fonction dérivée $f'$ est croissante sur $I$.

— $f$ est concave sur $I$ si, et seulement si, sa fonction dérivée $f'$ est décroissante sur $I$.

CONSÉQUENCE

On note $f''$ la dérivée seconde de la fonction $f$, c'est à dire la dérivée de la dérivée $f'$.

— Si la dérivée seconde est positive alors la fonction $f$ est convexe.

— Si la dérivée seconde est négative alors la fonction $f$ est concave.

EXEMPLE

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
Sa dérivée est la fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
Sa dérivée seconde est la fonction $f''$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$.
Les variations de $f'$ se déduisent du signe de sa dérivée $f''$.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x-3$. D'où le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| variations de $f'$ | | ↘ | | ↗ | |
| convexité de $f$ | | CONCAVE | | CONVEXE | |

$f$ est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

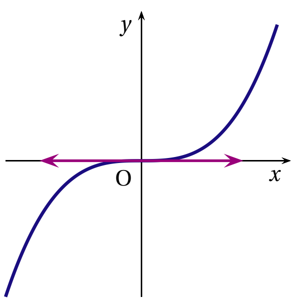
## 2 POINT D'INFLEXION

**DÉFINITION**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un point $A$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que $A$ est un point d'inflexion.

EXEMPLE

La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $\text{O}(0;0)$ du repère.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.
La tangente au point $O$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.




— Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty;0]$.

— Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $\text{O}(0;0)$ est un point d'inflexion.

CONSÉQUENCES

— En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
— Si la dérivée $f'$ change de sens de variation en $a$ alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse $a$.
— Si la dérivée seconde $f''$ s'annule en changeant de signe en $a$ alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse $a$.

EXEMPLE

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Sa dérivée est la fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 40$.
Sa dérivée seconde est la fonction $f''$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^2(x-3)$.

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.

Les variations de $f'$ se déduisent du signe de sa dérivée $f''$. D'où le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| variations de $f'$ | ↘ | | | | $-175$ | ↗ | |

En tenant compte des changements de variation de la dérivée $f'$ on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A\left(3; f(3)\right)$.

En effet :

— $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ $f''(x) \leqslant 0$ donc le point $B(0; 120)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction $f$ est concave sur $]-\infty; 3]$).
— $f''$ s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A(3; -162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. (La fonction $f$ est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$).