Devoir Surveillé n°4A
Correction

Terminale ES/L
Premier Bilan
Durée 2 heures - Coeff. 8
Noté sur 20 points

Exercice 1. Probabilité : d'après Bac Polynésie 2016 — 5 points

Partie A

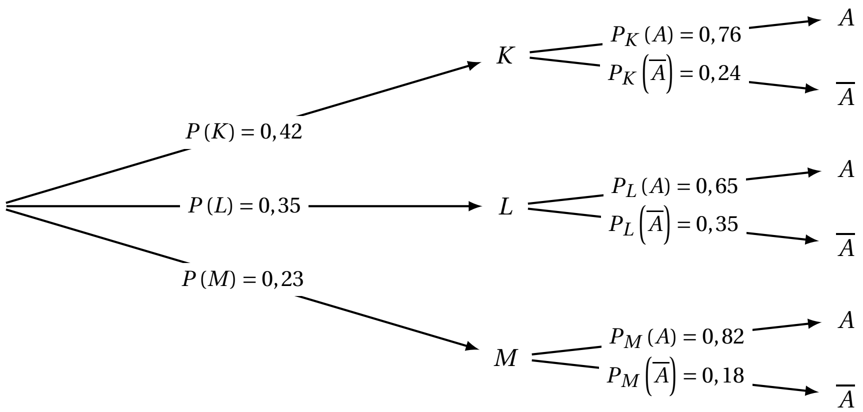
1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

- 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro. Donc

$$P(K) = 0,42 \; ; \; P(L) = 0,35 \text{ et } P(M) = 0,23$$

- 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ; 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ; 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées donc :

$$P_K(A) = 0,76 \; ; \; P_L(A) = 0,65 \text{ et } P_M(A) = 0,82$$



2. Calculer la probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée.
On cherche la probabilité de l'évènement $(K \cap A)$ or :

$$\boxed{P(K \cap A) = P(K) \times P_K(A) = 0,42 \times 0,76 \approx \underline{0,319}}$$

3. Montrer que $P(A) \approx 0,735$.
D'après la formule des probabilités totales, puisque les évènements K, L et M forment une partition de l'univers on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap K) + P(A \cap L) + P(A \cap M) \\ &= P(A \cap K) + P(L) \times P_L(A) + P(M) \times P_M(A) \\ P(A) &= 0,42 \times 0,76 + 0,35 \times 0,65 + 0,23 \times 0,82 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A) \approx 0,735}$$

4. La demande de prêt est acceptée. Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro.
Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro sachant que la demande de prêt est acceptée est :

$$P_A(M) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M) \times P_M(A)}{P(A)} \approx \frac{0,23 \times 0,82}{0,735}$$

$$\boxed{P_A(M) \approx 0,257}$$

Exercice 2. Les Suites : d'après Bac Amérique du Nord 2016 — 7 points

Le 1^er^ janvier 2016, on compte 4 000 abonnés. À partir de cette date, les dirigeants de la société ont constaté que d'un mois sur l'autre, 8 % des anciens joueurs se désabonnent mais que, par ailleurs, 8 000 nouvelles personnes s'abonnent.

1. Calculer le nombre d'abonnés à la date du 1^er^ février 2016.

Au 1^er^ février 2016, l'entreprise aura perdu 8 % des 4 000 anciens joueurs et en aura gagné 8 000 soit :

$$\boxed{4000 \times (1-0,08)+8000 = \underline{11680}}$$

Pour la suite de l'exercice, on modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre de milliers d'abonnés au bout de n mois après le 1^er^ janvier 2016. La suite (u_n) est donc définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,92u_n + 8.$$

2. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
N est un nombre entier naturel
U est un nombre réel
Traitement
U prend la valeur 4
N prend la valeur 0
Tant que U < 40
    U prend la valeur 0,92 × U + 8
    N prend la valeur N + 1
Fin Tant que
Sortie
Afficher N
```

2. a. Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les valeurs de U seront arrondies au dixième.

Cet algorithme va afficher le rang du premier terme de la suite qui est supérieur ou égal à 40. On peut ajouter une ligne avec la date pour plus de visibilité.

Année	01/01/16	01/02/16	01/03/16	01/04/16	01/05/16	01/06/16	01/07/16
N	0	1	2	3	4	5	6
U	4,0	11,7	18,7	25,2	31,2	36,7	41,8
U<40	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	FAUX

2. b. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Cet algorithme va afficher le rang du premier terme de la suite qui est supérieur ou égal à 40, il affichera donc la valeur 6.
C'est le 1^er^ juillet 2016 que la société aura plus de 40 000 abonnés.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 100$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,92 et calculer son premier terme v_0.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 4 \\ u_{n+1} & = 0,92 \times u_n + 8 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 100 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 100 \\
v_{n+1} &= (0,92\ u_n + 8) - 100 \\
v_{n+1} &= 0,92 \times u_n - 92 \\
v_{n+1} &= 0,92 \times \left(u_n + \frac{-92}{0,92}\right) \\
v_{n+1} &= 0,92 \times (u_n - 100) \\
v_{n+1} &= 0,92 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}92$, et de premier terme $v_0 = -96$ puisque :

$$v_0 = u_0 - 100$$
$$v_0 = 4 - 100$$
$$v_0 = -96$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -96 \\ v_{n+1} & = 0{,}92 \times v_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. Donner l'expression de v_n en fonction de n.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}92$, et de premier terme $v_0 = -96$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_n = -96 \times (0{,}92)^n}$$

3. c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 100 - 96 \times 0{,}92^n$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 100$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 100$$

Soit :

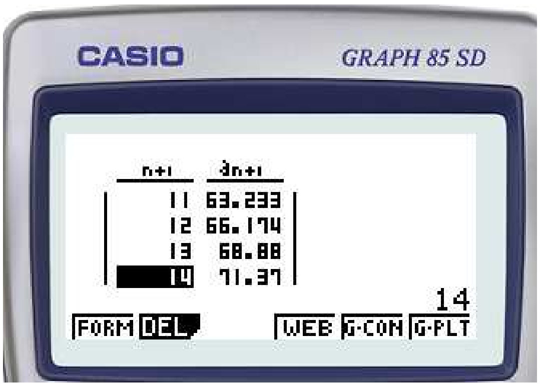
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = -96 \times (0{,}92)^n + 100}$$

4. A l'aide de la calculatrice, déterminer la date (année et mois) à partir de laquelle le nombre d'abonnés devient supérieur à 70 000.

Pour déterminer la date (année et mois) à partir de laquelle le nombre d'abonnés devient supérieur à 70 000 on doit résoudre l'inéquation $u_n > 70$ avec entier naturel. SOit :

$$u_n > 70 \iff -96 \times 0{,}92^n + 100 > 70$$

La calculatrice donne :



Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux à 14.

La date (année et mois) à partir de laquelle le nombre d'abonnés devient supérieur à 70 000 est donc le 1er mars 2017.

Exercice 3. La fonction exponentielle : Bac Asie 2015 — 8 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,10]$ par : $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}$.

1. Étude des variations de la fonction f

1. a. En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variation.

La ligne 2 du logiciel nous donne la dérivée de f qui s'exprime sous la forme :

$$\forall x \in [0\,;\,10]\ ;\ f'(x) = -\exp(-x+1)+1$$

- On a pour tout réel $x \in [0\,;\,10]$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow -\exp(-x+1)+1 = 0$$
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x+1} = 1$$
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x+1} = \mathrm{e}^{0}$$

Par propriété de la fonction exponentielle (stricte croissance sur $\mathbb{R}$)

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow -x+1 = 0$$

soit

$$\forall x \in [0\,;\,10]\ ;\ \boxed{f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1}$$

- En outre pour tout réel $x \in [0\,;\,10]$:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow -\mathrm{e}^{-x+1}+1 > 0$$
$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 1 > \mathrm{e}^{-x+1}$$
$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{0} > \mathrm{e}^{-x+1}$$

Par propriété de la fonction exponentielle (stricte croissance sur $\mathbb{R}$)

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 0 > -x+1$$

$$\forall x \in [0\,;\,10]\ ;\ \boxed{f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 10 \geq x > 1}$$

En conséquence :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 10 \geq x > 1 \\ f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow\ f'(x) < 0 \Longleftrightarrow 0 \leq x < 1}$$

La fonction f est donc croissante sur $[1\,;\,10]$ et décroissante sur $[0\,;\,1]$.

On peut alors dresser le tableau de variations de f avec les valeurs aux bornes :

x	0	1	10
$f(x)$	e	2	$10+\mathrm{e}^{-9} \approx 10$

x	0		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$\mathrm{e} \approx 2.4$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$10+\mathrm{e}^{-9} \approx 10$

1. b. En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.

Sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ la fonction f admet donc un minimum en 1, qui vaut $f(1) = 2$.

2. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

> **Proposition 1** (Fonction convexe/concave)
>
> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
>
> - La fonction f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus (resp. *au-dessous*) de chacune de ses tangentes ;
> - f est convexe (resp. *concave*) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. *décroissante*) sur I.

> **Proposition 2** (Fonction convexe/concave)
>
> Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
> $\boldsymbol{f}$ **est convexe** si et seulement si **sa dérivée seconde $\boldsymbol{f''}$ est à valeurs positives ou nulles**.
> $\boldsymbol{f}$ **est concave** si et seulement si **sa dérivée seconde $\boldsymbol{f''}$ est à valeurs négatives ou nulles**.

La fonction dérivée f' est dérivable sur $[0;10]$.
La ligne 4 du logiciel nous donne la dérivée seconde de f qui est strictement positive :

$$\forall x \in [0;10]\ ;\ f''(x) = \mathrm{e}^{-x+1} > 0$$

De ce fait, la propriété 2 implique que $\underline{f \text{ soit convexe sur } [0;10]}$.

Partie B

Le coût de revient est modélisé par la fonction $\boldsymbol{f}$ où $\boldsymbol{x}$ *est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets* et $\boldsymbol{f(x)}$ *le coût de revient exprimé en milliers d'euros.*

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?
D'après la question **A1b.**, sur l'intervalle $[0;10]$ la fonction f admet un minimum en 1, qui vaut $\underline{f(1) = 2}$.
Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x *est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets* et $f(x)$ *le coût de revient exprimé en milliers d'euros* donc il faut produire 1 centaine d'objets soit <u>100 objets</u> pour que le coût de revient soit minimal, égal à $1\,000 \times f(1) \approx 2\,000$€.

2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour $\boldsymbol{x}$ centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.

2. a. Justifier que le montant obtenu par la vente de $\boldsymbol{x}$ centaines d'objets est $\boldsymbol{1{,}2x}$ milliers d'euros.
Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €donc la vente de x centaines d'objets rapporte $12x$ centaines d'euros soit <u>$1{,}2x$ milliers d'euros</u>.

2. b. Montrer que la marge brute pour $\boldsymbol{x}$ centaines d'objets, en milliers d'euros, est : $\boldsymbol{g(x) = 0{,}2x - \mathrm{e}^{-x+1}}$.
La marge brute pour x centaines d'objets, notée $g(x)$, en milliers d'euros, est donnée par la différence entre le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets soit $1{,}2x$ milliers d'euros et le coût de revient est modélisé par la fonction f oùx est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

$$\forall x \in [0;10]\ ;\ g(x) = 1{,}2x - f(x) = 1{,}2x - \left(x + \mathrm{e}^{-x+1}\right)$$

$$\boxed{\forall x \in [0;10]\ ;\ g(x) = 0{,}2x - \mathrm{e}^{-x+1}}$$

2. c. Montrer que la fonction $\boldsymbol{g}$ est strictement croissante sur l'intervalle $\boldsymbol{[0\,;10]}$.
La fonction g est dérivable sur $[0;10]$ comme différence de fonctions qui le sont :

$$\forall x \in [0;10]\ ;\ g(x) = 1{,}2x - f(x)$$

Donc on a facilement la dérivée de g en utilisant la **partie A1a**.

$$\forall x \in [0;10]\ ;\ g'(x) = (1{,}2x)' - f'(x) = 1{,}2 + \mathrm{e}^{-x+1} - 1$$

$$\boxed{\forall x \in [0;10]\ ;\ g'(x) = 0{,}2 + \mathrm{e}^{-x+1}}$$

L'exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la dérivée d eg s'exprime donc comme la somme de deux termes strictement positifs sur $[0;10]$.
La fonction <u>g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;10]$</u>.

3. 3. a. Montrer que l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ possède une unique solution $\boldsymbol{\alpha}$ sur l'intervalle $\boldsymbol{[0\,;10]}$.
On peut alors dresser le tableau de variations de g avec les valeurs aux bornes :

$$\forall x \in [0;10]\ ;\ g(x) = 0{,}2x - \mathrm{e}^{-x+1}$$

x	0	10
$f(x)$	$-\mathrm{e} \approx -2.7$	$2 - \mathrm{e}^{-9} \approx 2$

x	0	α	10
Signe de $g'(x)$		$+$	
g	$-\mathrm{e} \approx -2.7$	0	$2-\mathrm{e}^{-9} \approx 2$

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

Application du corollaire :

- La fonction g est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0;10]$;
- Le réel $k = 0$ est compris entre $g(0)$ et $g(10)$:

$$g(0) \approx -2,7 < 0 < g(10) \approx 2$$

Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;10]$.

3. b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,01$.

Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0,01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{lcl} g(1,94) & \approx & -0,0026 < 0 \\ g(1,95) & \approx & 0,00326 > 0 \end{array}\right|$, donc $\boxed{1,94 < \alpha < 1,95}$.

4. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.

On a vu lors de la question **B2b.** que la marge brute pour x centaines d'objets, en milliers d'euros, est : $g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.
L'étude menée lors de la question **B3.** nous permet d'obtenir le signe de g.

x	0	1.94	α	1.95	10
g		≈ -0.003	0	≈ 0.003	

On a donc :

x	0		α		10
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Attention maintenant à ne pas conclure trop vite, la quantité d'objets est un nombre entier.

x	$1,94$	$1,95$
$f(x)$	$g(1,94) \approx -0,0026 < 0$	$g(1,95) \approx 0,00326 > 0$
Nombre d'objets	$1,94 \times 100 = 194$ mais marge brute négative	$1,95 \times 100 = 195$

La quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets est de 195 objets.