Devoir Surveillé n°2A
Correction

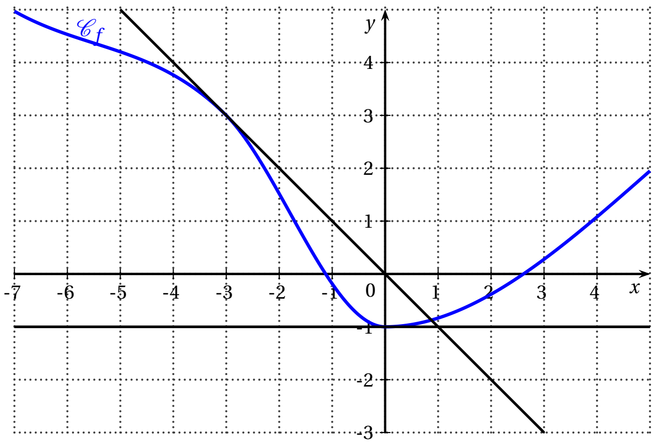
Terminale ES
Continuité et Convexité
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

Exercice 1. QCM — 3 points

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Question 1 (Réponse c)

La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



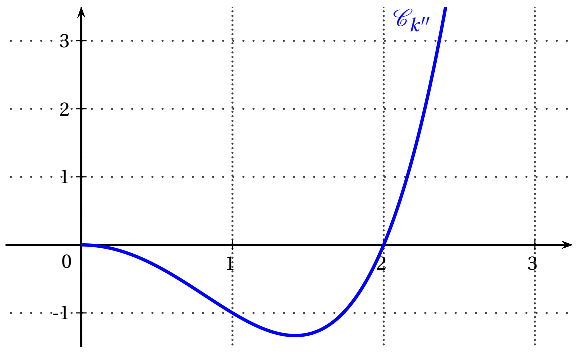
a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ $\boxed{\textbf{c.}\ f'(-3) = -1}$ **d.** $f'(-3) = 3$

Preuve

- Au point d'abscisse 0, la tangente est horizontale donc $f'(0) = 0$ ce qui exclu la réponse a.
- Au point d'abscisse -1, la tangente n'est pas horizontale donc $f'(-1) \neq 0$ ce qui exclu la réponse b.
- Au point d'abscisse -3, la tangente est de pente négative donc $f'(-3) < 0$ ce qui exclu la réponse d.
- La seule réponse possible à la question 1 est la réponse c.

Question 2 (Réponse a)

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0\,;\,+\infty[$.



$\boxed{\textbf{a. } k \text{ est concave sur l'intervalle } [1\,;2].}$ **b.** k est convexe sur l'intervalle $[0\,;2]$.

c. k est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$. **d.** k est concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

Preuve

Sur l'intervalle $[1\,;2]$, la dérivée seconde k'' est négative donc le fonction k est concave sur cet intervalle.
La réponse a est correcte, il n'est pas nécessaire de tester les autres.
La seule réponse possible à la question 4 est la réponse a.

Question 3 (Réponse c)

On considère l'algorithme suivant :

Pseudo Code

$V \leftarrow 10$
$S \leftarrow 10$
$N \leftarrow 0$
Tant que $S \leqslant 50$
    $V \leftarrow 1,05 \times V$
    $S \leftarrow S + V$
    $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

- **Affirmation a :** Après exécution de l'algorithme, N est égale à 2.
- **Affirmation b :** Après exécution de l'algorithme, N est égale à 3.
- $\boxed{\textbf{Affirmation c :}}$ Après exécution de l'algorithme, N est égale à 4.
- **Affirmation d :** Après exécution de l'algorithme, N est égale à 5.

Preuve

		V	S	N
	Test	10	10	0
1er passage	$S = 10 \leq 50$	$V = 1.05 \times 10 = 10,5$	$S = 10 + 10,5 = 20,5$	1
2e passage	$S = 20,5 \leq 50"$	$V = 1.05 \times 10,5 = 11,025$	$S = 20,5 + 11,025 = 31,525$	2
3e passage	$S = 31,525 \leq 50$	11.57625	43.10125	3
4e passage	$S = 43.10125 \leq 50$	12.1550625	55.2563125	4
5e passage	$S = 55.2563125 > 50$	STOP		

Donc la bonne réponse est la c.

Exercice 2. Convexité 4 points

On considère la fonction h définie sur $[-10\,;\,10]$ *par :* $h(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$. *Que pensez-vous de l'affirmation suivante :*

Affirmation 1

$\mathscr{C}_h$, la courbe représentative de h, présente un point d'inflexion sur $[-10\,;\,10]$.

Pour étudier la convexité de h, on va étudier le signe de sa dérivée seconde h''.
La fonction h est définie et dérivable sur $[-10\,;\,10]$ car c'est une fonction polynôme.
Pour tout réel x de $[-10\,;\,10]$ on a :

$$h'(x) = 3x^2 - 4x + 3 \text{ et } h''(x) = 6x - 4$$

Pour tout réel x de $[-10\,;\,10]$:

$$\left\{\begin{array}{l} 6x-4=0 \iff x=\dfrac{2}{3} \\ 6x-4<0 \iff x<\dfrac{2}{3} \end{array}\right| \Longrightarrow 6x-4>0 \iff x>\dfrac{2}{3}$$

x	-10		$\frac{2}{3}$		10
Signe de $h''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de h		f concave		f convexe	

Conclusion : la fonction h change de concavité en $x = \dfrac{2}{3}$ donc sa courbe représentative présente un point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{2}{3}$. L'affirmation est donc vraie.

Exercice 3. Avec une fonction auxiliaire 13 points

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,10]$ *par :* $f(x) = 2x^2 - 30x + 200 + \dfrac{50}{x}$.

1. **[1 point] Calculer f' sur $[1\,;\,10]$ et montrer que pour tout x de cet intervalle : $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 30x^2 - 50}{x^2}$.**

   La fonction f est définie et dérivable sur $[1\,;\,10]$. Pour tout réel x de $[1\,;\,10]$ on a :

$$f'(x) = 4x - 30 - \frac{50}{x^2}$$

   Ce qui donne après mise au même dénominateur :

$$\boxed{f'(x) = \frac{4x^3 - 30x^2 - 50}{x^2}}$$

2. Étude d'une fonction auxiliaire.

   2. a. [3 points] Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[1\,;\,10]$ par : $g(x) = 4x^3 - 30x^2 - 50$.

   La fonction g est définie et dérivable sur $[1\,;\,10]$ car c'est i une fonction polynôme. Pour tout réel x de cet intervalle on a :

$$g'(x) = 12x^2 - 60x = 12x(x-5)$$

   La dérivée g' est donc une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 12 \\ b = -60 \\ c = 0 \end{cases}$.

   La factorisation évidente (ou l'aide du discriminant) permet d'obtenir immédiatement les deux racines qui sont :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \notin [1\,;\,10] \\ x_2 = 5 \in [1\,;\,10] \end{cases}$$

   Le coefficient $a = 12$ étant positif, g' est positif à l'extérieur des racines et négatif entre soit :

x	1		5		α		10
Signe de $g'(x)$		$-$	0		$+$		
Variations de g	-76		-300		0		950

2. b. [4 points] Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1 ; 10]$. Donner un encadrement de α au centième.

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a ; b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a ; b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- Sur l'intervalle $[1 ; 5]$, le maximum de f est -76 donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.
- Application du corollaire sur $[5; 10]$:
  - La fonction g est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[5; 10]$;
  - Le réel $k = 0$ est compris entre $g(5) = -300$ et $g(10) = 950$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[5; 10]$.
- Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; 10]$. Cette solution α appartient à l'intervalle $[5 ; 10]$.
- Encadrement de α .
  Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0,01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(7,71) & \approx & -0,067 < 0 \\ g(7,72) & \approx & 2,4466 > 0 \end{array}\right|, \quad \text{donc } \underline{7,71 < \alpha < 7,72}.$$

2. c. [1 point] Étudier le signe de g sur $[1 ; 10]$.
Le tableau de variation de g , nous donne directement son signe :

x	1		α		10
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

3. [2 points] Á l'aide de l'étude menée lors de la question (3.), étudier les variation de la fonction f sur $[1 ; 10]$.
Pour tout réel x de $[1; 10]$:

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 30x^2 - 50}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

La fonction f s'exprime comme le quotient de $g(x)$ par x^2 strictement positif sur $[1; 10]$, de ce fait f' est du signe de g. L'étude menée dans la question (2.) nous donne alors les variations de f.

x	1		$\color{red}{7.71}$		α		$\color{red}{7.72}$		10
Signe de $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$		$-$			0			$+$	
Variations de f	222	$\searrow$	$\color{red}{\approx 94,07328}$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$\color{red}{\approx 94,07348}$	$\nearrow$	105

4. Application [2 points] .

Le coût moyen de production d'une entreprise est donné par $C(x) = 2x^2 - 30x + 200 + \dfrac{50}{x}$, où x est la quantité produite en tonnes, variant de 1 à 10 tonnes de productions, et $C(x)$ est exprimé en milliers d'euros.
Le patron de l'entreprise affirme que le cout moyen minimum de production est inférieur à 95 000 euros. Qu'en pensez-vous ?
D'après le tableau de variation de la question (3.), le minimum de f sur $[1\,;\,10]$ est $f(\alpha)$, avec $7,71 < \alpha < 7,72$. D'après les variations de f on a :

$$\begin{cases} f(7,71) \approx 94,07328 \\ f(7,72) \approx 94,07348 \end{cases} \Longrightarrow f(\alpha) < 95$$

On sait donc que $f(\alpha)$ est inférieur à 95 et donc que le cout moyen minimum de production est inférieur à 95 000 euros.

∽ Fin du devoir ∽

Bonus
Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 = -2$ sur $\mathbb{R}$ et une approximation au centième.