Devoir Surveillé n°6 Correction

Terminale ES/L

Intégrales et primitives

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

Exercice 1. 4.5 points

Soit g et G définies sur $]0\,;\,+\infty[$ *par :* $g(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ *et* $G(x) = (\ln x)^2$.

1. [1.5 point] Démontrer que G est une primitive de g.

La fonction G est une primitive de g si elle est dérivable et que $G' = g$.
Or G est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. Elle est de la forme u^2 donc de dérivée $2u'u$ avec pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \dfrac{1}{x}$

Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:

$$G'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$$
$$G'(x) = 2 \times \frac{\ln x}{x}$$
$$G'(x) = \underline{g(x)}$$

G est bien une primitive de g

2. [1.5 point] Trouver la primitive de g qui s'annule pour $x = \mathrm{e}$.

Les primitives de g sont de la forme $H_k(x) = G(x) + k = (\ln x)^2 + k$ donc la primitive de g qui s'annule pour $x = \mathrm{e}$ vérifie :

$$H_k(\mathrm{e}) = 0 \iff G(\mathrm{e}) + k = 0 \iff \underbrace{(\ln \mathrm{e})^2}_{1^2} + k = 0 \iff k = -1$$

Soit

$$\boxed{H(x) = (\ln x)^2 - 1}$$

3. [1.5 point] Montrer que : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

On remarque que

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x} = 2 \times \frac{\ln x}{x} \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2} \times g(x)$$

Donc

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \times (G(\mathrm{e}) - G(1))$$
$$= \frac{1}{2} \times \underbrace{\left((\ln \mathrm{e})^2 - (\ln 1)^2\right)}_{1-0}$$

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}}$$

Exercice 2. 15.5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe. Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur [0; 7].

1. **Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle [0 ; 7].**

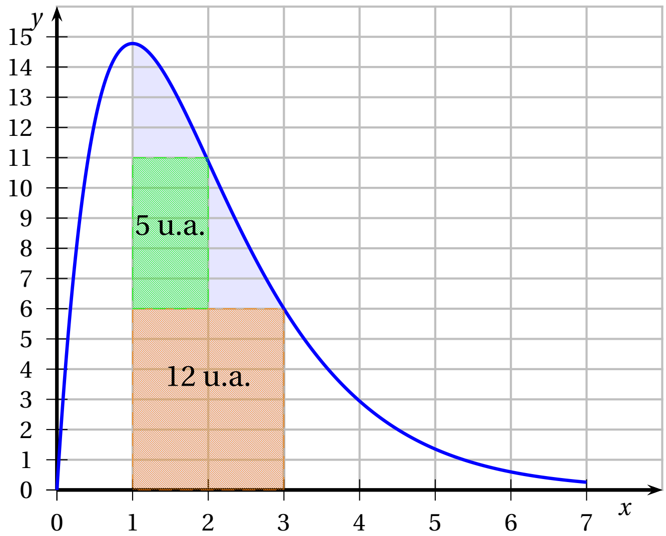
$$f(x) = 10 \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < x_1 < 1 \\ 2 < x_2 < 3 \end{cases}$$

2. **Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 7] et préciser la valeur en laquelle il est atteint.**
Le maximum de la fonction f vaut environ 14,8 et il semble atteint pour $x = 1$.

3. **La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel ?**

a. [9 ; 17] $\boxed{\textbf{b.}\ [18\,;26]}$ **c.** [27 ; 35]

La fonction est définie et dérivable (donc continue) sur son intervalle de définition, elle y est donc intégrable. Y étant en outre positive, l'intégrale correspond donc à l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
On voit alors que la valeur de l'intégrale appartient à l'intervalle [16 ; 26], et seule la réponse b convient.



Partie B

La fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 7] d'expression : $f(x) = 2xe^{-x+3}$.

1. **Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 7], $f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x+3}$.**

$$f : \begin{cases} [0\,;\,7] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-x+3} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur [0 ; 7].
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,7]\,;\ f(x) = u(x) \times v(x) \ : \begin{cases} u(x) = 2x & ; \quad u'(x) = 2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x+3} & ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x+3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0\,;\,7],\ f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$
$$f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x+3} + 2x \times \left(-\mathrm{e}^{-x+3}\right)$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,7]\,;\ f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x+3}}$$

2.

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 7]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction f.

$$\forall x \in [0\ ;\ 7]\ ;\ f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x+3}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et a fortiori sur $[0\ ;\ 7]$ donc f' est du signe du facteur $(-2x+2)$.

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+2=0 \Longleftrightarrow x=1 \\ -2x+2<0 \Longleftrightarrow x>1 \end{array}\right|$$

Donc on obtient pour $f\ :\ x \longmapsto f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x+3}$:

x	0	α	1	β	7
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	10	$2\mathrm{e}^2 \approx 14.8$	10	$14\mathrm{e}^{-4} \approx 0.26$

2. b. Calculer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 7]$.
Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 7]$ est $2\mathrm{e}^2$, il est atteint pour $x = 1$.

3.

3. a. Justifier que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0 ; 7]$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)
Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

***Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- **Application du corollaire sur $[0 ; 1]$:**
  - La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0; 1]$;
  - Le réel $k = 10$ est compris entre $f(0) = 0$ et $f(1) = 2\mathrm{e}^2 \approx 14,8$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x) = 10$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0; 1]$.
- **Application du corollaire sur $[1 ; 7]$:**
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1 ; 7]$;
  - Le réel $k = 10$ est compris entre $f(7) \approx 0,26$ et $f(1) = 2\mathrm{e}^2 \approx 14,8$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x) = 10$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[1; 7]$.

3. b. On admet que $\alpha \approx 0,36$ à 10^{-2} près. Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.
Pour avoir un encadrement de β, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcr} f(2,16) & \approx & 10,007 > 10 \\ f(2,17) & \approx & 9,95 < 10 \end{array}\right| ,\quad \text{donc } 2,16 < \beta < 2,17.$$

Une valeur approchée de β à 0.01 près est donc $\underline{\beta \approx 2,16}$.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 7] par : $F(x) = (-2x-2)\text{e}^{-x+3}$.

4. a. Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle [0 ; 7].

$$F : \begin{cases} [0\,;\,7] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad F(x) = (-2x-2)\times \text{e}^{-x+3} \end{cases}$$

La fonction F est dérivable sur $[0\,;\,7]$.
La fonction F est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,7]\,;\; F(x) = u(x)\times v(x) \;:\; \begin{cases} u(x) = (-2x-2) & ; \quad u'(x) = -2 \\ v(x) = \text{e}^{-x+3} & ; \quad v'(x) = -\text{e}^{-x+3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,7],\;\; F'(x) &= u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) \\ F'(x) &= -2\times \text{e}^{-x+3} + (-2x-2)\times\left(-\text{e}^{-x+3}\right) \\ F'(x) &= (-2+2x+2)\,\text{e}^{-x+3} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,7]\,;\; F'(x) = 2x\text{e}^{-x+3} = f(x)}$$

Donc F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;\,7]$.

4. b. Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$.

La fonction f est positive (et continue) sur $[1\,;\,3]$ donc l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_1^3 f(x)\,\text{d}x = F(3) - F(1) \\ &= (-6-2)\text{e}^{-3+3} - (-2-2)\text{e}^{-1+3} \\ &= -8\text{e}^0 + 4\text{e}^2 \\ \mathscr{A} &= \underline{\left(4\,\text{e}^2 - 8\right)\;\; \text{u.a.}} \end{aligned}$$

5. La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).

5. a. Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.

La valeur moyenne du bénéfice lorsque l'entreprise vend entre 1 centaine et 3 centaines d'objets est (en milliers d'euros) :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{3-1}\times\int_1^3 f(x)\,\text{d}x \\ &= \frac{1}{2}\times\left(4\,\text{e}^2 - 8\right) \\ m &\approx \underline{10,778} \end{aligned}$$

Donc la valeur moyenne du bénéfice lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets est de <u>10 778 euros</u> (arrondi à l'euro).

5. b. L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros. Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.

On cherche donc à résoudre l'inéquation $f(x) > 10$. D'après la question **(3.a.)** et les variations de f on a :

$$f(x) > 10 \iff x \in \left]\alpha\,;\,\beta\right[\;\;\text{avec}\;\; \begin{cases} \alpha \approx 0,36 \;\text{ et }\; f(0,36) \approx 10,09 > 10 \\ \beta \approx 2,16 \;\text{ et }\; f(2,16) \approx 10,007 > 10 \end{cases}$$

L'entreprise doit donc vendre entre 0,36 centaine et 2,16 centaines soit <u>entre 36 et 216 objets</u> pour que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros.

Fin du devoir