Devoir Surveillé n°5 Correction

Terminale ES/L

Fonctions logarithme , exponentielle et suites

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

Exercice 1. Un peu de suites — 6.5 points

Les suites (u_n) et (a_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 750 \\ u_{n+1} & = 0{,}95 \times u_n + 10 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (a_n) : \begin{cases} a_0 & \\ a_n & = u_n - 200 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= u_{n+1} - 200 \\ a_{n+1} &= (0{,}95\ u_n + 10) - 200 \\ a_{n+1} &= 0{,}95 \times u_n - 190 \\ a_{n+1} &= 0{,}95 \times \left(u_n + \frac{-190}{0{,}95}\right) \\ a_{n+1} &= 0{,}95 \times (u_n - 200) \\ a_{n+1} &= 0{,}95 \times a_n \end{aligned}$$

La suite (a_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$, et de premier terme $a_0 = 550$ puisque :

$$\begin{aligned} a_0 &= u_0 - 200 \\ a_0 &= 750 - 200 \\ a_0 &= 550 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 550 \\ a_{n+1} & = 0{,}95 \times a_n \end{cases} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. En déduire l'expression de a_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier n, on a : $u_n = 550 \times 0{,}95^n + 200$.

La suite (a_n) est géométrique de raison $q = 0{,}95$, et de premier terme $a_0 = 550$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ a_n = a_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ a_n = 550 \times (0{,}95)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$a_n = u_n - 200$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = a_n + 200$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_n = 550 \times (0{,}95)^n + 200}$$

3. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n < 201$.

$$\begin{aligned} u_n < 201 &\iff 550 \times 0,95^n + 200 < 201 \\ &\iff 0,95^n > \frac{201-200}{550} = \frac{1}{550} \end{aligned}$$

On compose alors par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$

$$u_n < 201 \iff \ln 0,95^n < \ln \frac{1}{550} = -\ln 550$$
$$u_n < 201 \iff n \times \ln 0,95 < -\ln 550$$

On divise les deux membres par ln 0,95 qui est négatif (car $0 < 0,95 < 1$) , l'ordre change

$$\iff n > \frac{-\ln 550}{\ln 0,95} \approx 123.02$$

Donc puisque n est entier,

$$u_n < 201 \iff \underline{n \geq 124}$$

4. Compléter cet algorithme afin qu'il réponde à la question posée :

Pseudo Code

$u \leftarrow 750$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u >= 201$ Faire
  $n \leftarrow n+1$
  $u \leftarrow u \times 0,95 + 10$
Fin Tant que
Afficher n

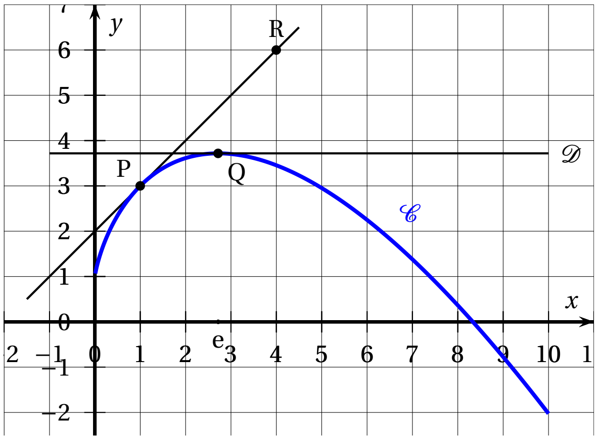
ou

Pseudo Code

$u \leftarrow 750$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u >= 201$ Faire
  $n \leftarrow n+1$
  $u \leftarrow 550 \times 0,95^n + 200$
Fin Tant que
Afficher n

Exercice 2. 13.5 points

La courbe $\mathscr{C}$ tracée est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.



P $(1\,;\,3)$ et R $(4\,;\,6)$. Le point Q a pour abscisse e, avec $\mathrm{e} \approx 2,718$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q. La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe au point Q.

Partie A

1. La droite (PR) a pour coefficient directeur le nombre $a = \dfrac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = \dfrac{6-3}{4-1} = 1$.

La seule équation correspondant à un coefficient directeur égal à 1 est $y = x + 2$ donc la bonne réponse est la **b.**

2. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

- Le point P $(1\,;\,3)$ appartient à $\mathscr{C}$ donc $f(1) = f(x_P) = y_P = 3$.
- La tangente (PR) à la courbe $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur 1 donc $f'(1) = 1$.

3. D'après le graphique, la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous des tangentes en chaque point de $]0\,;\,10]$; la fonction f est donc concave sur $]0\,;\,10]$. Réponse **b.**

Partie B

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ *par :* $f(x) = -x\ln x + 2x + 1$.

1.

1. a. Dérivée de f.

La fonction f est définie et dérivable sur $]0\,;\,10]$. Elle est de la forme $uv + w$ donc de dérivée $u'v + uv' + w'$ avec :

$u(x) = -x$	$u'(x) = -1$
$v(x) = \ln x$	$v'(x) = \dfrac{1}{x}$
$w(x) = 2x+1$	$w'(x) = 2$

Pour x de $]0\,;\,10]$ on a :

$$f'(x) = -1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x} + 2 = -\ln x - 1 + 2 = \underline{1 - \ln x}$$

1. b. Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

Pour démontrer que la fonction f admet un maximum sur $]0\,;\,10]$, on étudie les variations de f donc le signe de f' sur cet intervalle.

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \mathrm{e} > x \iff x < \mathrm{e}$$

et

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \mathrm{e} = x \iff x = \mathrm{e}$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$, strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,;\,10]$, et telle que $f'(\mathrm{e}) = 0$. Donc la fonction f admet un maximum pour $x = \mathrm{e}$.

x	0		e		α		10
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$			
Variations de f	‖	$\nearrow$	$\mathrm{e}+1 \approx 3.7$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-10\ln 10 + 21 \approx -2$

1. c. Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ est, (sachant que $\ln \mathrm{e} = 1$) :

$$\begin{aligned} f(\mathrm{e}) &= -\mathrm{e} \times \ln \mathrm{e} + 2\mathrm{e} + 1 \\ &= -\mathrm{e} + 2\mathrm{e} + 1 \\ f(\mathrm{e}) &= \underline{\mathrm{e}+1} \end{aligned}$$

2. La courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ si la fonction f est concave sur $]0\,;\,10]$. On sait qu'une fonction est concave sur un intervalle si et seulement si sa dérivée seconde est négative sur cet intervalle.
Pour tout réel de $]0\,;\,10]$ on a :

$$f'(x) = 1 - \ln x \Longrightarrow f''(x) = -\frac{1}{x}$$

Or sur l'intervalle $]0\,;\,10]$, x est positif et donc la dérivée seconde f'' est négative.

Donc la fonction f est concave sur $]0\,;\,10]$, d'où on déduit que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.

3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[\mathrm{e}\,;10]$ et déterminer un encadrement de α au centième.

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)
Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

***Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- <u>Application du corollaire sur $[\mathrm{e}\,;10]$</u> :
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;10]$;
  - Le réel $k = 0$ est compris entre $f(\mathrm{e}) \approx \mathrm{e}+1 \approx 3{,}7$ et $f(10) < 0$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,*
    l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;10]$.
- <u>Valeur approchée</u> .

  Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcr} f(8{,}33) & \approx & 0.0015 > 0 \\ f(8{,}34) & \approx & -0.0097 < 0 \end{array}\right| , \text{ donc } \underline{8{,}33 < \alpha < 8{,}34}.$$

4. ***<u>Bonus</u> : Montrer que :*** $\boldsymbol{\ln \alpha = 2 + \dfrac{1}{\alpha}}$**.**
Par définition de α on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\Longleftrightarrow -\alpha \ln \alpha + 2\alpha + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow -\alpha \ln \alpha = -2\alpha - 1 \\ &\Longleftrightarrow \alpha \ln \alpha = 2\alpha + 1 \\ &\Longleftrightarrow \ln \alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha} = 2 + \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$