Devoir Surveillé n°1
Correction

Terminale ES/L

Suites

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 20 points

Exercice 1. Validation des "Savoir Faire" — 8 points

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 100 \\ a_{n+1} & = 0{,}2 \times a_n + 12 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = -a_n + 15 \end{cases}$$

1. [1 point] Déterminer les trois premiers termes des suites (a_n) et (b_n).

$$a_0 = 100\,;\ a_1 = 32\,;\ a_2 = 18{,}4 \quad \text{et} \quad b_0 = -85\,;\ b_1 = -17\,;\ b_2 = -3{,}4$$

2. [2 points] Montrer que (b_n) est géométrique. En déduire son terme général.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= -a_{n+1} + 15 \\ b_{n+1} &= -\left(0{,}2\, a_n + 12\right) + 15 \\ b_{n+1} &= -0{,}2 \times a_n + 3 \\ b_{n+1} &= 0{,}2 \times \left(-a_n + \frac{3}{0{,}2}\right) \\ b_{n+1} &= 0{,}2 \times (-a_n + 15) \\ b_{n+1} &= 0{,}2 \times b_n \end{aligned}$$

La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}2$, et de premier terme $b_0 = -85$ puisque :

$$\begin{aligned} b_0 &= -a_0 + 15 \\ b_0 &= -100 + 15 \\ b_0 &= -85 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(b_n) : \begin{cases} b_0 & = -85 \\ b_{n+1} & = 0{,}2 \times b_n \end{cases} \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

La suite (b_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$, et de premier terme $b_0 = -85$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ b_n = b_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\ b_n = -85 \times (0{,}2)^n}$$

3. [0.5 point] Établir le sens de variation de la suite (b_n).

Propriété 1 (Variations d'une suite géométrique)

Une suite géométrique de raison q est monotone, c'est à dire croissante, décroissante (ou constante) si $q \geq 0$.

- Si $q = 0$ ou $q = 1$, la suite est constante.
- Si le premier terme est strictement positif : $\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{ la suite est croissante ;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{ la suite est décroissante.} \end{cases}$
- Si le premier terme est strictement négatif : $\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{ la suite est décroissante ;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{ la suite est croissante.} \end{cases}$

La suite (b_n) est géométrique, de premier terme $b_0 = -85$ négatif et de raison $q = 0,2$ comprise strictement entre -1 et 1. D'après le théorème 1 la suite (b_n) est donc <u>strictement croissante</u>.

4. **[1 point] Démontrer que pour tout entier n : $S_n = b_1 + b_2 + \cdots b_n = -21,25 \times (1 - 0,2^n)$.**
Pour tout entier n non nul, S_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique (b_n) est géométrique, de premier terme $b_0 = -85$ et de raison $q = 0,2$, on a donc :

$$S_n = b_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = -17 \times \frac{1-0,2^n}{1-0,2} = \frac{-17}{0,8} \times (1-0,2^n)$$

Soit

$$\boxed{S_n = -21,25 \times (1-0,2^n)}$$

5. **[0.5 point] Terme générale de la suite (a_n)**
De l'égalité définie pour tout entier n :

$$b_n = -a_n + 15$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = -b_n + 15$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n = 85 \times (0{,}2)^n + 15}$$

6. **[1 point] Déterminer les limites des suites (a_n) et (S_n).**

Puisque $-1 < 0,2 < 1$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 0,2^n = 0$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} 85 \times 0,2^n = 0$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} 85 \times 0,2^n + 15 = 15$$

Soit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 15}$$

Puisque $-1 < 0,2 < 1$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 0,2^n = 0$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} (1-0,2^n) = 1$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} -21,25 \times (1-0,2^n) = -21,25$$

Soit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = -21,25}$$

7. **[1 point] Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels avec la calculatrice l'inégalité : $a_n < 15,004$.**

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	100.0	32.0	18.4	15.7	15.136000	15.027200	15.005440	15.001088

On obtient donc :

$$\boxed{a_n < 15,004 \iff n \geq 7}$$

8. **[1 point] Recopier et compléter sur votre copie les lignes incomplètes de cet algorithme afin qu'il affiche le résultat de la question précédente (7.).**

Variables :	n est un entier naturel
	a est un nombre réel
Traitement :	Affecter à a la valeur 100
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $\boxed{a > 15,004}$ faire
	a prend la valeur $\boxed{0,2 \times a + 12}$ ou $\boxed{85 \times 0,2^n + 15}$
	n prend la valeur $\boxed{n+1}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $\boxed{n}$

Exercice 2. D'après Bac — 5 points

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent. En 2012, la ville comptait 40 000 habitants. On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012+n$. On a donc $U_0 = 40\,000$. On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par : $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\,200$. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = U_n - 9\,600$.

Question 1 (Réponse c)

La valeur de U_1 est :

a. 6 200 **b.** 35 000 **c.** <u>36 200</u> **d.** 46 200

Preuve

La valeur de U_1 est :

$$U_1 = 0,875 \times U_0 + 1\ 200$$
$$U_1 = 0,875 \times 40\ 000 + 1\ 200$$
$$U_1 = \underline{36\ 200}$$

Question 2 (Réponse b)

La suite (V_n) est :

a. géométrique de raison $-12,5\%$

b. <u>géométrique de raison $0,875$</u>

c. géométrique de raison $-0,875$

d. arithmétique de raison $-9\,600$

Preuve

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 9\ 600 \\ V_{n+1} &= 0,875 \times U_n + 1\ 200 - 9\ 600 \\ V_{n+1} &= 0,875 \times \left(U_n - \frac{8\ 400}{0,875}\right) \\ V_{n+1} &= 0,875 \times (U_n - 9\ 600) \end{aligned}$$

Et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ V_{n+1} = 0,875 V_n$$

La suite (V_n) est une suite <u>géométrique de raison $q = 0,875$</u> .

Question 3 (Réponse d)

La suite (U_n) a pour limite :

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 1 200 **d.** <u>9 600</u>

Preuve

- La suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,875$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ V_n = V_0 \times 0,875^n = 30\ 400 \times 0,875^n$$

- On sait que si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,875^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

- On a pour tout entier n,

$$U_n = V_n + 9\ 600$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 9\ 600}$$

Question 4 (Réponse c)

On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES :
    U, N
INITIALISATION :
    U prend la valeur 40 000
    N prend la valeur 0
TRAITEMENT :
    Tant que U > 10 000
        N prend la valeur N + 1
        U prend la valeur 0,875 × U + 1 200
    Fin du Tant que
SORTIE :
    Afficher N
```

Cet algorithme permet d'obtenir :

a. la valeur de $U_{40\,000}$

b. toutes les valeurs de U_0 à U_N

c. le plus petit rang n pour lequel on a $U_n \leqslant 10\,000$

d. le nombre de termes inférieurs à 1 200

Preuve

La boucle Tant que s'exécute et calcule les termes successifs de la suite Tant qu'ils sont strictement supérieurs à 10 000. Donc elle s'arrête pour le premier terme inférieure ou égal à 10 000. Au final l'algorithme affiche le rang de ce terme.
La bonne réponse est la réponse c.

Question 5 (Réponse a)

La valeur affichée est :

a. 33 **b.** 34 **c.** 9 600 **d.** 9 970,8

Preuve

En utilisant la fonction TABLE de la calculatrice, on trouve que le premier terme inférieur à 10 000 est u_{33}.

n	u_n
31	$\approx 10\,084{,}31$
32	$\approx 10\,023{,}77$
33	$\approx 9\,970{,}80$
34	$\approx 9\,924{,}45$

La bonne réponse est la réponse a.

Exercice 3. D'après Bac 2015 7 points

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région. Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 *nouvelles colonies chaque printemps.*

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables
n est entier
C est à valeurs réelles
Traitement
Affecter à C la valeur 300
Affecter à n la valeur 0
Tant que $C < 400$ faire
  C prend la valeur $C - C \times 0,08 + 50$
  n prend la valeur $n + 1$
Fin de Tant que
Sortie
Afficher n

1. a. [1 point] Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test C < 400	$\times$ $\times$ $\times$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Valeur de C	300	326	350	372	392	411
Valeur de n	0	1	2	3	4	5

1. b. [0.5 point] Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.
La valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme est

$$\boxed{n = 5}$$

Cela correspond au nombre d'années nécessaires pour que l'apiculteur possède plus de 400 colonies d'abeilles, soit 5 années.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n), le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

2. a. [1 point] Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n.
Soit n entier naturel.
L'année $2014 + (n + 1)$, l'agriculteur s'attend à perdre 8% des colonies, donc il lui en reste 92% des C_n de l'année précédente soit $0,92 \times C_n$.
De plus il installe 50 nouvelles colonies chaque printemps soit :

$$\boxed{(C_n) : \begin{cases} C_0 & = 300 \\ C_{n+1} & = 0,92\, C_n + 50 \end{cases} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. [1 point] On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$.
Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.
Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\,;\; V_{n+1} &= 625 - C_{n+1}\\ V_{n+1} &= 625 - 0,92\,C_n - 50\\ V_{n+1} &= -0,92\,C_n + 575\\ V_{n+1} &= 0,92\,\left(-C_n + \frac{575}{0,92}\right)\\ V_{n+1} &= 0,92\,(-C_n + 625)\\ V_{n+1} &= 0,92\,V_n\end{aligned}$$

La suite (V_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,92$, et de premier terme V_0 avec :

$$\begin{aligned}V_0 &= 625 - C_0\\ V_0 &= 625 - 300 = 325\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(V_n) : \begin{cases} V_0 & = 325 \\ V_{n+1} & = 0,92 \times V_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. c. [1 point] En déduire que pour tout entier naturel n, on a $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.
La suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0,92$, et de premier terme $V_0 = 325$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; V_n = V_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; V_n = 325 \times (0,92)^n}$$

De l'égalité $V_n = 625 - C_n$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $C_n = 625 - V_n$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; C_n = 625 - 325 \times (0,92)^n}$$

2. d. [1 point] Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?
Le nombre de colonies en 2024 est donné par C_{10} soit

$$\boxed{C_{10} \approx 483,82}$$

Le nombre de colonies étant un entier naturel, on arrondi comme dans la question **1.a.** à l'entier le plus proche.
On peut donc estimer qu'il y aura 484 colonies en 2024.

3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

3. a. [0.5 point] Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?
Il suffit pour cela de remplacer le test $\boxed{\text{Tant que } C < 400 \text{ faire}}$ par le test $\boxed{\text{Tant que } C < 600 \text{ faire}}$

3. b. [1 point] Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.
Cette question est assez libre dans sa résolution, on peut imaginer faire un tableau de valeurs comme dans la question 1, et lire les résultats mais c'est assez long. Plus rigoureusement, il faut résoudre une inéquation mais nous n'en sommes pas encore capable algébriquement.

- **Méthode 1 : tableau de valeurs**
  On arrondi comme dans la question **1.a.** à l'entier le plus proche.

Test C < 600	× × ×	Vrai	Vrai	Vrai	...	Vrai	Faux
Valeur de C	300	326	350	372	...	598	600
Valeur de n	0	1	2	3	...	30	31

- **Méthode 2 : résolution d'une inéquation .... attendons quelques mois encore.**

  Il faudra attendre 31 années soit 2045, pour doubler le nombre de colonies.

- Fin du devoir -