SUITES

Définition

On dit qu'une suite est arithmétique si la variation absolue lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant est constante. Cette variation est appelée la raison de la suite arithmétique.
C'est-à-dire qu'une suite est arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + r$
Le nombre r est la raison de la suite.

Remarques

- Lorsqu'une suite est arithmétique on passe d'un terme au suivant en ajoutant une constante.
- Pour justifier qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut démontrer que pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est une constante r.

Exemples

- Si on considère la suite (v_n) définie par $v_n = 3n - 5$, on peut remarquer que, pour tout entier n, on a :
  $v_{n+1} = 3(n + 1) - 5 = 3n + 3 - 5 = 3n - 5 + 3 = v_n + 3$. La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 3.
- Si on considère la suite (w_n) définie par $w_n = n^2 + 1$, on peut remarquer que : $w_0 = 1$; $w_1 = 2$; $w_2 = 5$
  La variation absolue lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant n'est pas constante (il faut ajouter 1 pour passer de w_0 à w_1 et ajouter 3 pour passer de w_1 à w_2).
  La suite (w_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 01

Le 01/01/2014 un journal compte 10 000 abonnés.
Le service des abonnements a noté que, chaque mois, 1 000 abonnements arrivent à échéance.
Sur ces 1 000 abonnements, 750 sont renouvelés.
De plus chaque mois 320 nouveaux abonnements sont souscrits.
On note u_1 le nombre d'abonnés à la date du 01/01/2014, u_2 le nombre d'abonnés à la date du 01/02/2014, et ainsi de suite, de mois en mois.

1°) Donner les valeurs de u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 .
2°) Justifier que la variation absolue lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant est constante. Quelle est cette variation ? Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3°) En utilisant un fichier de tableur, représenter graphiquement la suite (u_n) pour $1 \leqslant n \leqslant 12$.
Que peut-on remarquer ?
4°) Déterminer u_{13} et u_{25} . Interpréter ces résultats.

Propriété

Lorsqu'une suite est arithmétique sa représentation graphique est constituée de points alignés.
Lorsque la représentation graphique d'une suite est constituée de points alignés, cette suite est arithmétique.

Remarque

Lorsqu'une suite est arithmétique, on parle d'évolution linéaire.

Exercice 02)

On suppose qu'un pin d'un âge supérieur à 10 ans a une croissance régulière annuelle de 40cm de hauteur.
On note h_n la hauteur en mètres du pin à l'âge n (pour $n \geqslant 10$)
1°) En supposant dans cette question que $h_{10} = 22$, calculer h_{11} et h_{12} .
2°) Montrer que la suite $(h_n)_{n\geqslant 10}$ est une suite arithmétique.
3°) On suppose qu'un pin de 10 ans a une hauteur de 17m. Quelle sera sa hauteur lorsqu'il aura 22 ans ?
4°) On suppose qu'un pin de 28 ans a une hauteur de 25m. Quelle était sa hauteur lorsqu'il avait 18 ans ?
5°) Représenter graphiquement pour n compris entre 10 et 30 la hauteur d'un pin qui mesure 15m à 10 ans.

Définition

On dit qu'une suite est géométrique si la variation relative lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant est constante. Cette variation relative est appelé la raison de la suite géométrique.
C'est-à-dire qu'une suite est géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n \times q$
Ce nombre q est la raison de la suite géométrique.

Remarques

- Lorsqu'une suite est géométrique on passe d'un terme au suivant en multipliant une constante.
- Pour justifier qu'une suite (u_n) est géométrique, on peut démontrer que pour tout entier n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante q.
- Lorsqu'une suite est géométrique, on parle d'évolution exponentielle.

Exemples

- Si on considère la suite (v_n) définie par $v_n = 2 \times 5^n$, on peut remarquer que, pour tout entier n, on a :
  $v_{n+1} = 2 \times 5^{n+1} = 2 \times 5^n \times 5 = v_n \times 5$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 5.
- Si on considère la suite (w_n) définie par $w_n = n^2 + 1$, on peut remarquer que : $w_0 = 1$; $w_1 = 2$; $w_2 = 5$
  La variation relative lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant n'est pas constante puisqu'il faut multiplier par 2 pour passer de w_0 à w_1 et multiplier par 2,5 pour passer de w_1 à w_2.
  La suite (w_n) n'est pas géométrique.

Exercice 03

Les nombres suivants peuvent-ils être les premiers termes d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique. Si c'est le cas, donner la raison de la suite.

1°) 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9

2°) 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162

3°) 45 ; 40 ; 35 ; 30 ; 25

4°) 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 11

5°) $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{16}$

Exercice 04

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1°) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 .

2°) La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique ? une suite géométrique ?

3°) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 1$

a) Calculer v_0 ; v_1 ; v_2 ; v_3 ; v_4

b) Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique et donner sa raison.

Propriétés

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
  Pour tout entier n et tout entier p , on a $u_n = u_p + (n - p)r$
- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$.
  Pour tout entier n et tout entier p , on a $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

Cas particuliers

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , on a : $u_n = u_0 + nr$; $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , on a : $u_n = u_0 \times q^n$; $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

Exercice 05

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite arithmétique de raison r.

- Sachant que $r = 3$ et $u_0 = -10$, calculer u_{12} .
- Sachant que $r = 2$ et $u_4 = 10$, calculer u_0 et u_{22} .
- Sachant que $u_4 = 18$ et $u_2 = -12$, calculer r et u_0 .

$(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite géométrique de raison q.

- Sachant que $\mathrm{v}_1 = 3$ et $q = -2$, calculer v_3 et v_6 .
- Sachant que $\mathrm{v}_2 = 4$ et $\mathrm{v}_3 = 9$, calculer v_4 et v_0.

Exercice 06

Le tableau ci-dessous indique le nombre d'exploitations agricoles en France entre 1955 et 2000.

Année	1955	1970	1988	2000
Rang n de l'année	0	15	33	45
Nombre d'exploitations (en milliers)	2280	1588	1017	664

(Source INSEE)

1°) On admet dans cette question que le nombre d'exploitations agricoles (en milliers) pour l'année de rang n est modélisé par la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2280$ et de raison -36.

a) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 .

b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
En déduire les valeurs de u_{15} ; u_{33} et u_{45} .

d) En utilisant ce modèle calculer le nombre d'exploitations agricoles que l'on peut prévoir pour 2015.

2°) On admet dans cette question que le nombre d'exploitations agricoles (en milliers) pour l'année de rang n est modélisé par la suite géométrique (v_n) de premier terme $\mathrm{v}_0 = 2280$ et de raison 0,973.

a) Calculer v_1 ; v_2 ; v_3 . (les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche)

b) Justifier que ce modèle correspond à une variation relative constante d'une année sur l'autre.
Donner, en pourcentage, cette variation relative.

c) Déterminer v_n en fonction de n.
En déduire les valeurs de v_{15} ; v_{33} et v_{45} .

d) En utilisant ce modèle calculer le nombre d'exploitations agricoles que l'on peut prévoir pour 2015.

Exercice 07

Des mesures annuelles ont permis de modéliser la teneur en plomb de l'eau venant de deux réserves.
Les teneurs sont données en microgrammes par litre (µg/l).

1°) Dans la réserve R1 la teneur en plomb pour l'année 1990 + n est donnée par $u_n = 5 \times 1{,}05^n$

a) Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

b) Déterminer la teneur en plomb dans la réserve R1 pour l'année 2000.

c) Donner le sens de variation de la suite (u_n).

d) En utilisant un tableur, donner les valeurs de u_0 jusqu'à u_{200}. Vérifier le résultat de la question 1°)b).

e) Quelle semble être la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini ?

2°) Dans la réserve R2 la teneur en plomb pour l'année 1990 + n est donnée par $\mathrm{v}_n = 29 \times 0{,}97^n$

a) Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

b) Déterminer la teneur en plomb dans la réserve R2 pour l'année 2000.

c) Donner le sens de variation de la suite (v_n).

d) En utilisant un tableur, donner les valeurs de v_0 jusqu'à v_{200}. Vérifier le résultat de la question 2°)b).

e) Quelle semble être la limite de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

3°) La limite de qualité pour la teneur en plomb dans l'eau destinée à la consommation humaine qui était de de 25 microgrammes par litre a été abaissée en 2014 à 10 microgrammes par litre.
Indiquer, à partir des tableaux des questions 1°)d) et 2°)d) durant quelles années l'eau des réserves R1 et R2 est conforme à la législation.

Propriété

Soit q un réel strictement positif.

- Si $0 < q < 1$, la limite de q^n, quand n tend vers $+\infty$, est 0. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q > 1$, la limite de q^n, quand n tend vers $+\infty$, est $+\infty$. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Remarque

Si $q = 1$, on a $q^n = 1$ pour tout entier n, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

Exercice 08

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}01^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{47}{43}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}89^n$

Exercice 09

(voir **réponses et correction**)

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = 2$.

1°) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 .

2°) En utilisant un tableur donner les valeurs de u_1 à u_{100} .

3°) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Propriété

Soit q un réel strictement positif.
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $a \neq 0$ et de raison q.

- Si $0 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Si $q > 1$ et $a > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $q > 1$ et $a < 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exercice 10

Dans une population on estime à 500 000 le nombre de personnes porteuses d'un virus V.
Une campagne de prophylaxie permet de faire baisser chaque année de 8% le nombre de porteurs du virus.
On appelle u_n le nombre de personnes porteuses du virus pour l'année n. On a ainsi $u_0 = 500000$.

1°) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 .

2°) Montrer que pour tout entier n on a $u_{n+1} = 0{,}92 \times u_n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

3°) Quelle est la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

4°) On désire savoir au bout de combien d'années le nombre de porteurs du virus V sera inférieur à 100 000 et pour cela on considère l'algorithme présenté ci-contre.

Écrire cet algorithme avec Algobox, le faire fonctionner et vérifier que la réponse est 20.

En utilisant l'expression de u_n obtenue à la question 2°) calculer u_{19} et u_{20} et vérifier le résultat donné par cet algorithme.

Variables :	*n* est un nombre entier *u* est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à *n* la valeur 0 Affecter à *u* la valeur 500000

Traitement :	Tant que *u* > 100000
	   Affecter à *n* la valeur *n*+1
	   Affecter à *u* la valeur 0.92 x *u*
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher *n*

5°) En renforçant les mesures de prophylaxie, on peut espérer faire baisser chaque année le nombre de personnes porteuses du virus de 15% au lieu de 8%.
Quelle modification doit-on apporter à l'algorithme de la question précédente et dans ces conditions au bout de combien d'années le nombre de porteurs du virus V sera-t-il inférieur à 100 000 ?

Propriété

La somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q \neq 1$ est :

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple

On peut écrire $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10} = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = 2047$

Exercice 11

Exprimer en fonction de n la somme $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

En déduire la valeur de S_{20}

Exercice 12

Une entreprise, propose pour recruter un nouvel employé un salaire annuel de 21 000 euros avec augmentation annuelle du salaire de 4% tous les ans.
On note s_n le salaire annuel pour l'année n. On a donc $s_1 = 21\,000$

1°) Calculer s_2 et s_3 .

2°) Justifier que $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 113743$ (arrondi à l'entier le plus proche)

3°) Si un nouvel employé reste 20 ans dans l'entreprise, calculer la somme de ses salaires durant ces 20 ans. En déduire son salaire annuel moyen sur ces 20 ans.

4°) Vérifier les résultats précédents en utilisant un tableur.

Exercice 13

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1000 de son entreprise.
En 2 000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.
Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2 % par an.
On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année (2 000 + n) par une suite (U_n).
On a donc $U_0 = 120\,000$.

1°) Montrer que pour tout entier naturel n : $U_n = 120\,000 \times 0{,}98^n$.

2°) a) Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2 005 ?

b) Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.

c) Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.
Recopier et compléter les lignes 7 et 8 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 90\,000$.

```
1  Variables :  A est un réel
2  n est un entier naturel
3  Initialisation :  Affecter à A la valeur 120 000
4  Affecter à n la valeur 0
5  début
6     tant que A ⩾ 90 000
7           n prend la valeur …
8           …
9     fin
10 fin
11 Sortie :  Afficher n
```

3°) a) Exprimer $1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \ldots\ldots + 0{,}98^n$ en fonction de n.

b) On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$

Montrer que $S_n = 6\,000\,000 \times (1 - 0{,}98^{n+1})$

c) En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.

Exercice 14

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2 013 et a enregistré 2 500 inscriptions en 2 013.
Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.
On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).
On note $a_0 = 2\,500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2 013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année 2 013+n.

1°) a) Calculer a_1 et a_2 .

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 400$.

2°) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2\,000$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0{,}8$.

b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0{,}8^n + 2\,000$

c) Calculer la limite de la suite (a_n).

d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?

3°) On propose l'algorithme suivant :

Variables :	*N* entier
	A réel
Initialisation :	*N* prend la valeur 0
	A prend la valeur 2 500
Traitement :	Tant que $A - 2\,000 > 50$
	A prend la valeur $A \times 0{,}8 + 400$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N

a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

c) Écrire l'algorithme proposé avec Algobox et vérifier le résultat obtenu dans la question précédente.

Remarque

Une suite vérifiant une relation du type $u_{n+1} = u_n + b$ est une suite arithmétique (de raison b)
Une suite vérifiant une relation du type $u_{n+1} = a \times u_n$ est une suite géométrique (de raison a)
Une suite vérifiant une relation du type $u_{n+1} = a \times u_n + b$ est appelée suite arithmético-géométrique.

Exercice 15

On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012.
À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70% de son effectif pour l'année suivante.
Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1°) Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.

2°) On définit la suite (a_n) par :

$a_0 = 700$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}7 \times a_n + 240$.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 800$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7. Préciser son premier terme.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

3°) On choisit de modéliser le nombre d'élèves du lycée par les termes de la suite (a_n).
Il faudra agrandir le lycée dès que l'effectif sera supérieur ou égal à 780 élèves.

a) Montrer que résoudre l'inéquation $800 - 100 \times 0{,}7^n \geqslant 780$ revient à résoudre l'inéquation $0{,}7^n \leqslant 0{,}2$.

b) En quelle année faudra-t-il agrandir le lycée ?

Exercice 16

Le paradoxe d'Achille et de la tortue fut imaginé par Zénon d'Élée (5 siècles avant J.-C.).
Achille qui court très vite, dispute une course avec une tortue à laquelle il a laissé une certaine distance d'avance.
Au départ Achille se trouve à la position A_0 et la tortue à la position A_1.
Achille court et arrive en A_1. Pendant qu'il courait, la tortue a avancé et elle se trouve alors à la position A_2.
Achille court et arrive en A_2. Pendant qu'il courait, la tortue a avancé et elle se trouve alors à la position A_3.
etc….
La course peut se poursuivre selon une infinité d'étapes et Achille ne rattrape jamais la tortue.

Pourtant si Achille court plus vite que la tortue, on sait bien qu'il va la rattraper !
C'est ce type de proposition qui semble contraire à la logique, au "bon sens", que l'on appelle paradoxe.
Supposons qu'Achille parcourt 4 mètres en une seconde (soit environ 15 km/h), que la tortue avance de 0,5 m en une seconde et qu'elle ait, au départ, une avance de 560 mètres.

1°) Quelle est la distance $d_0 = A_0A_1$ et quel est le temps t_0 qu'il faut à Achille pour parcourir cette distance ?
2°) Pendant qu'Achille parcourait la distance d_0, de quelle longueur a avancé la tortue ?
3°) Quel est le temps t_1 qu'il faut à Achille pour parcourir la distance $d_1 = A_1A_2$?
4°) On note d_n la distance A_nA_{n+1} et t_n le temps qu'il faut à Achille pour parcourir la distance d_n .
Justifier que pour tout entier n, $d_n = 8 \times d_{n+1}$ et que $t_n = 8 \times t_{n+1}$.
5°) En déduire que les suites (d_n) et (t_n) sont géométriques et donner leur raison.
6°) Donner l'expression de d_n en fonction de n et de t_n en fonction de n.
7°) Calculer $D_n = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_n$ et $T_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$.
8°) Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.
9°) Comment peut-on expliquer le paradoxe ?

Exercice 17

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que :

- 10% des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;
- 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

Partie A

On donne l'algorithme ci-contre :

Entrée :	Saisir n entier positif
Traitement :	X prend la valeur 80 {Initialisation}
	Pour i allant de 1 à n
	Affecter à X la valeur $0,9X + 20$
	Fin Pour
	X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1°) Pour la valeur $n = 2$ saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?
2°) Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur $n = 2$ saisie, le nombre affiché à la sortie de cet algorithme.

Partie B

1°) On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,9a_n + 20$.
Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = a_n - 200$.
a) Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
b) Exprimer b_n en fonction de n.
2°) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 200 - 120 \times 0,9^n$.
3°) Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

Partie C

1°) L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?
2°) Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.