EXERCICE 1

1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = -2x + 3$.
   Vérifier que g est la dérivée de f. Trouver d'autres fonctions ayant g pour dérivée.
2. Dans chacun des cas suivants, trouver une fonction F ayant pour dérivée la fonction f sur l'intervalle I.

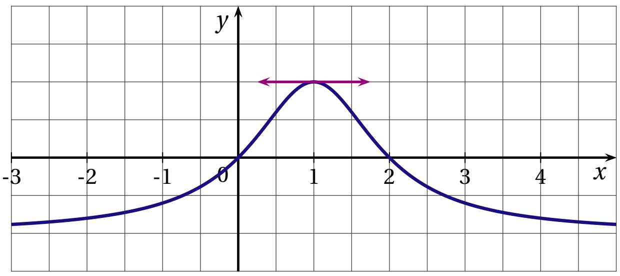
   a) $f(x) = 3x - 2 \quad (I = \mathbb{R})$
   b) $f(x) = 2x^2 + x - 1 \quad (I = \mathbb{R})$
   c) $f(x) = x^3 \quad (I = \mathbb{R})$
   d) $f(x) = \dfrac{3}{x^2} \quad (I =]0; +\infty[)$
   e) $f(x) = \dfrac{2}{x} \quad (I =]0; +\infty[)$
   f) $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x} \quad (I = \mathbb{R})$

EXERCICE 2

Soit F et G les fonctions définies sur $]-1; +\infty[$ par : $F(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ et $G(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x + 1}$
Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1; +\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

EXERCICE 3

Une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f est définie par $F(x) = \dfrac{2}{x^2 - 2x + 2}$. On a tracé ci-dessous, la courbe représentative d'une autre primitive G de f.



1. Donner l'expression de $G(x)$.
2. Déterminer $f(1)$.

EXERCICE 4

Dans chaque cas, trouver une primitive F de la fonction f.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + \dfrac{1}{2}$.
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 1 - \dfrac{1}{x^2}$.
3. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$.
4. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{3x}$.
5. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$.

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $F(-2) = 0$.
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ et $F(1) = -1$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)^2$ et $F\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$.
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$ et $F(0) = -\dfrac{1}{2}$.
5. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$ et $F(-1) = \dfrac{1}{4}$.

EXERCICE 6

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

1. $A=\int_{-1}^{2}\left(x^2-3x+1\right)\,\mathrm{d}x$
2. $B=\int_{2}^{6}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}-1\right)\,\mathrm{d}x$
3. $C=\int_{-2}^{1}2\,\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$
4. $D=\int_{0}^{\ln 2}2\,\mathrm{e}^{x}\times\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)\,\mathrm{d}x$
5. $E=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 7

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On sait que $f(2)=-4$ et que le signe de la fonction f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		$+\infty$
signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	

PARTIE A

1. Soit F la primitive de la fonction fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que $F(4)=\frac{1}{2}$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction F.
   a) Donner le tableau de variations de la fonction F.
   b) On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(2;3)$.
   Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

PARTIE B

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=1-\frac{12}{x^2}-\frac{16}{x^3}$

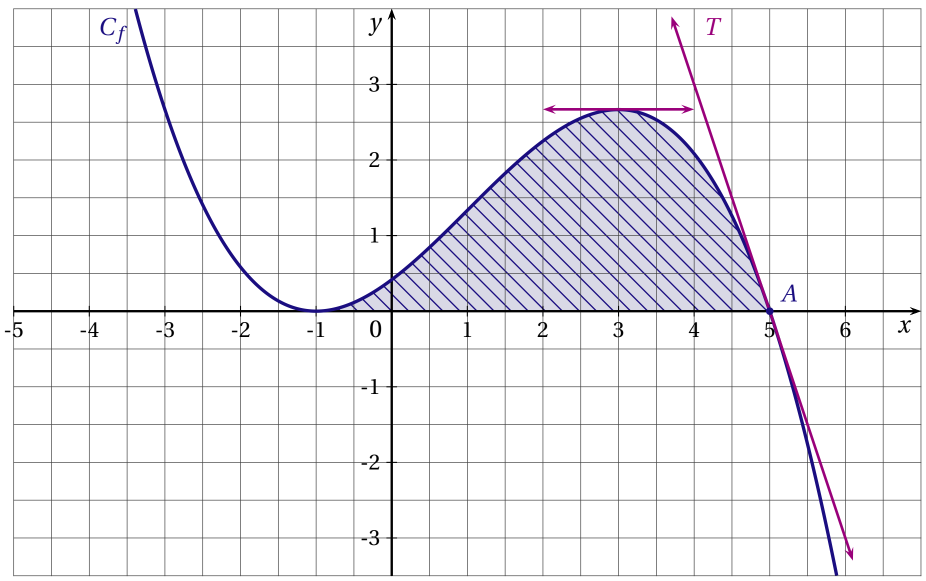
1. a) Calculer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que $F(4)=\frac{1}{2}$.
   b) Vérifier que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 2 a pour équation $y=-4x+11$.
2. Étudier la convexité de la fonction F

EXERCICE 8

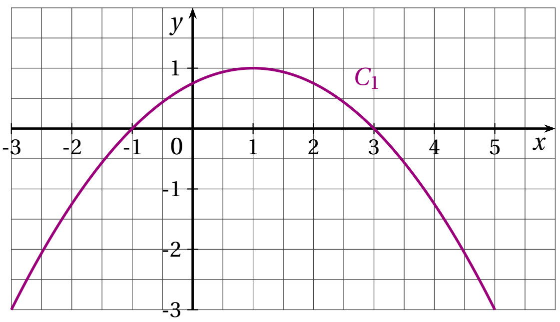
1. Calculer l'intégrale $\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
2. Peut-on en déduire que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$ est constante sur l'intervalle $[-2;2]$?

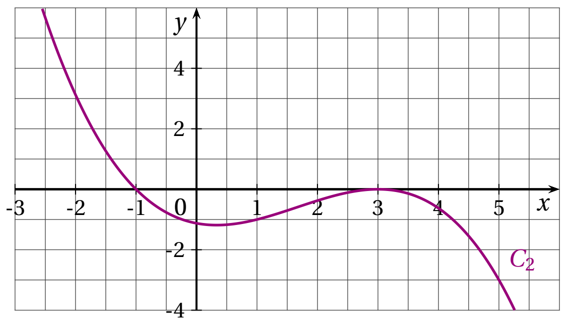
EXERCICE 9

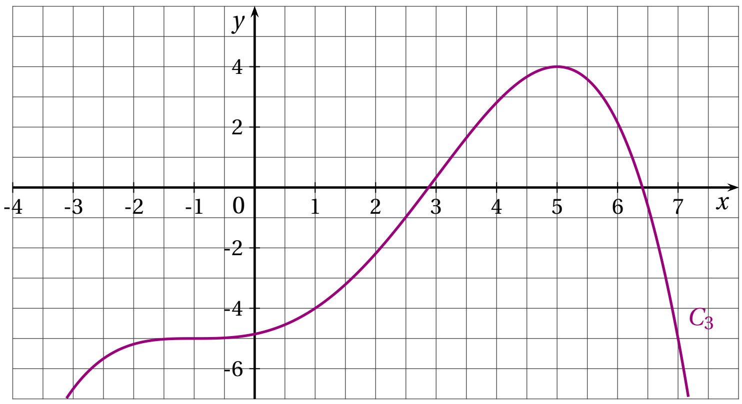
La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point de coordonnées $(4;3)$.
On note f' la dérivée de la fonction fonction f et F une primitive de la fonction fonction f.



1. Déterminer $f'(3)$ et $f'(5)$.
2. Donner le tableau de variations de la fonction F.
3. Donner un encadrement de l'intégrale $\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre celle de la fonction F.
   a) Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.



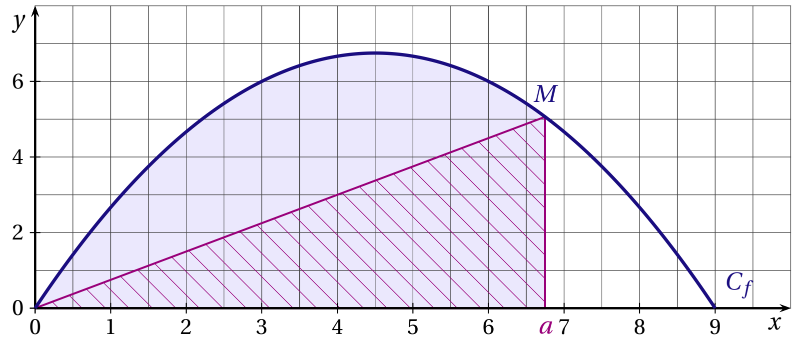




   b) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine colorié.
   c) La courbe représentative de la fonction F admet-elle des points d'inflexion ?

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = 3x - \dfrac{x^2}{3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

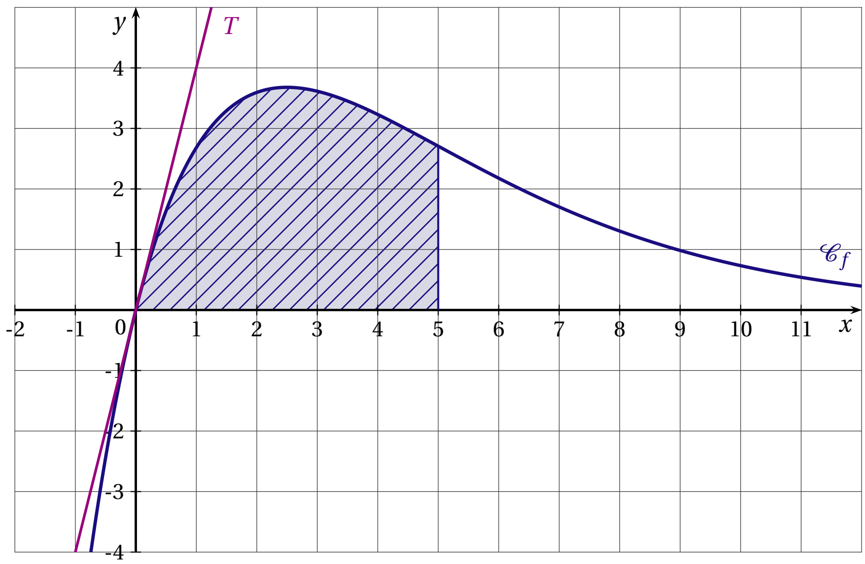


L'objet de cet exercice est de déterminer l'abscisse a du point M de la parabole $\mathscr{C}_f$ telle que l'aire du triangle hachuré soit égale à la moitié de l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

1. Quelle est l'ordonnée du point M de la parabole $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a ? En déduire l'aire T en fonction de a du triangle hachuré.
2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ en fonction de a du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.
3. Déterminer a pour que $\mathscr{A} = 2T$.

EXERCICE 11

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



PARTIE A - Lecture graphique

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$.
2. Soit F une primitive de f. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

   PROPOSITION A : Sur l'intervalle $[5 ; +\infty[$, la fonction F est croissante.

   PROPOSITION B : $F(-1) \leqslant F(0)$.

   PROPOSITION C : $12 \leqslant F(5) - F(0) \leqslant 18$.

PARTIE B - Calcul d'aire

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 4x\mathrm{e}^{-0,4x}$.

1. On cherche une primitive F de la fonction f de la forme $F(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-0,4x}$ avec a et b deux nombres réels.

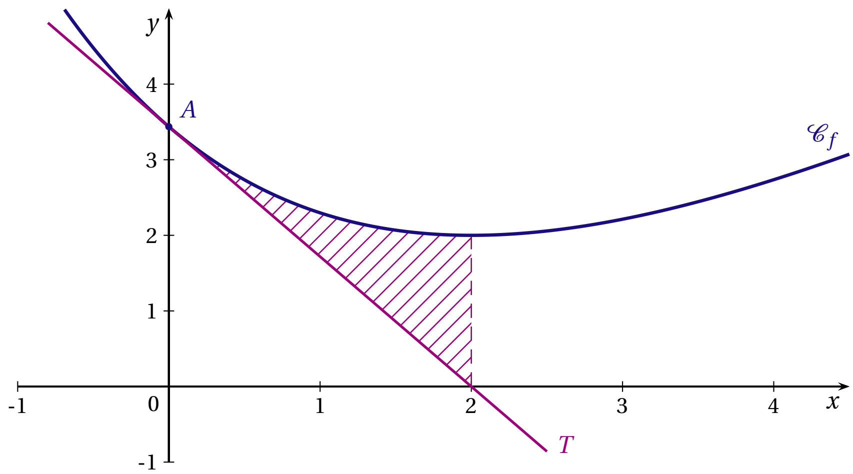
   a) Montrer que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} -0,4a & = & 4 \\ a-0,4b & = & 0 \end{cases}$

   b) Calculer a et b et donner l'expression de $F(x)$.

2. On note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine colorié sur le graphique. Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

EXERCICE 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{1-0,5x} + x - 2$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.(*Unités graphiques* : 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées)



1. a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f, puis étudier son signe.

   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

3. a) Étudier la convexité de la fonction f.

   b) En déduire la position relative de la tangente T par rapport à la courbe $\mathscr{C}_f$.

4. Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, T l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
   Donner une valeur approchée arrondie au centième près de cette aire en cm^2.

EXERCICE 13

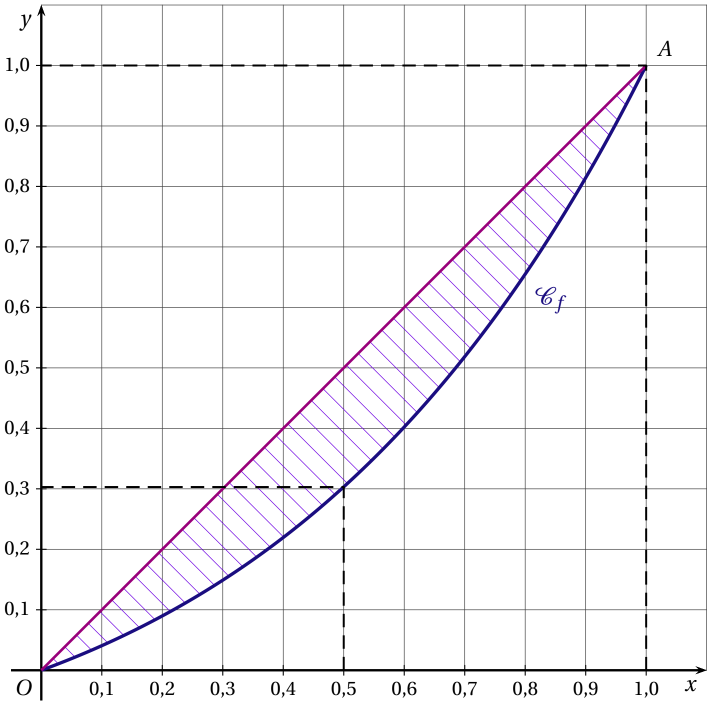
PARTIE A

Soit f une fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x-1}$.

1. Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$, $f(x) \leqslant x$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
3. Montrer que la fonction f est strictement croissante.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0;1]$.
5. Vérifier que la fonction F définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$ par $F(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{x-1}$ est une primitive de la fonction f.

PARTIE B

La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f, est la courbe de Lorenz qui modélise la répartition des salaires d'une entreprise.



— sur l'axe des abscisses, x représente le pourcentage cumulé (sous forme décimale) des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise;

— sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ représente le pourcentage (sous forme décimale) de la masse salariale correspondante.

Par exemple $f(0,5) \approx 0,303$ signifie que : « environ 30,3% de la masse salariale est détenue par la moitié des employés ayant les salaires les plus faibles ».

1. Déterminer la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles qui détiennent 50 % de la masse salariale. (*On donnera le résultat arrondi à* 0,1% *près.*)
2. On mesure l'inégalité de la répartition en comparant l'écart entre la situation d'équité parfaite et la situation réelle. On définit alors l'indice de Gini noté γ par $\gamma = 2 \times \mathscr{A}$, où $\mathscr{A}$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré compris entre le segment $[OA]$ et la courbe de Lorenz $\mathscr{C}_f$.

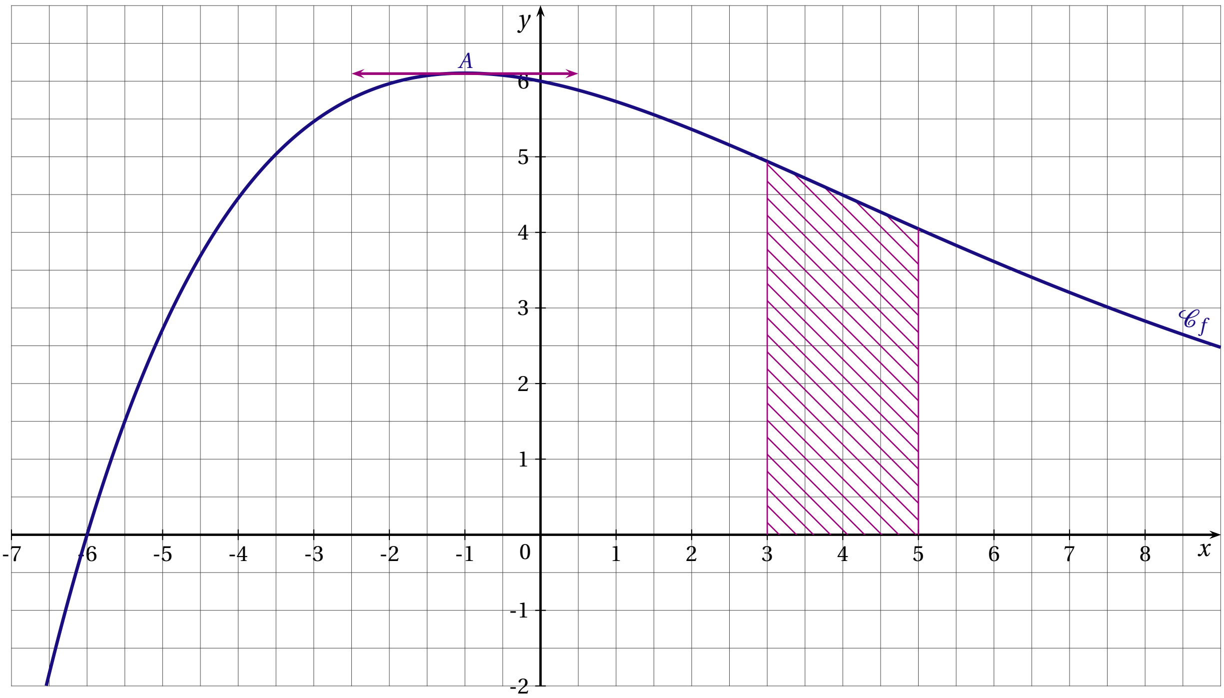
   a) Montrer que $\gamma = 1 - 2 \times \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   b) Calculer γ. (*On donnera la valeur exacte de* γ *et la valeur arrondie à* 10^{-3} *près.*)

EXERCICE 14

PARTIE A : Lecture graphique

On donne ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(-1)$.
2. Déterminer le signe de $f'(4)$.
3. Déterminer une valeur approchée à l'unité près de l'aire du domaine hachuré.

PARTIE B : Étude d'une fonction

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = (x+6)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.
On note f' sa fonction dérivée et on admet que pour tout réel x, on a $f'(x) = (-0,2x - 0,2)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que $f''(x) = (0,04x - 0,16)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$, pour tout réel x.
   b) Étudier la convexité de la fonction f.
   c) Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion et déterminer ses coordonnées.
3. a) Démontrer que la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = (-5x - 55)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au centième près.

PARTIE C : Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[1;8]$ par la fonction f étudiée dans la partie B.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 4 euros.
2. En utilisant les résultats de la partie B, déterminer la demande moyenne arrondie au millier d'objets près, lorsque le prix unitaire varie entre 3 et 5 euros.
3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix. On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x \qquad \text{sur } [1;8]$$

   Calculer $E(4)$. Interpréter le résultat.

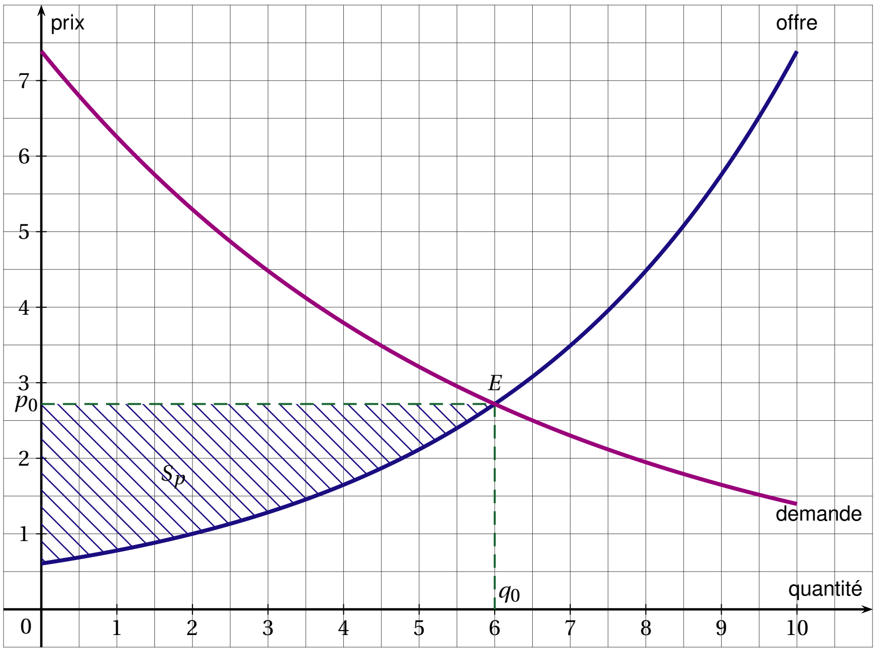
EXERCICE 15

Les fonctions d'offre et de demande d'un produit sont définies sur $[0;10]$ par :

— fonction d'offre $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{4}-\frac{1}{2}}$;
— fonction demande $g(x)=\mathrm{e}^{2-\frac{x}{6}}$.

Où x est la quantité en milliers d'articles et $f(x)$ et $g(x)$ sont des prix unitaires en euros.

1. Étudier les variations des fonctions f et g.
2. Les courbes représentatives des fonctions f et g sont données ci-dessous. Au point E d'équilibre du marché, le prix p_0 en euro demandé par les consommateurs est égal au prix d'offre des producteurs et la quantité échangée sur le marché en milliers d'articles est égale à q_0.



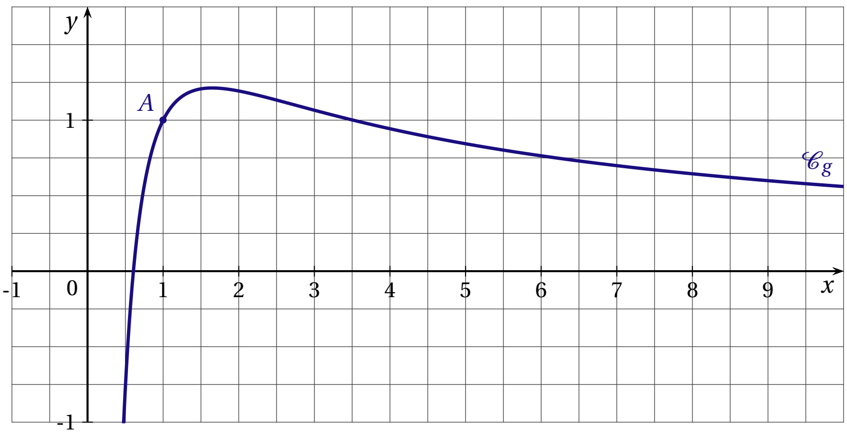
Calculer la quantité d'équilibre q_0 en nombre d'articles et le prix d'équilibre p_0 arrondi au centime d'euro près.

3. On considère les nombres $I=\displaystyle\int_0^{q_0} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $J=p_0q_0$. Donner une interprétation graphique de $I-J$.
4. On admet que la quantité d'équilibre q_0 est de 6 milliers d'articles.
   a) Exprimé en milliers d'euros, le surplus des consommateurs, est donné par $S_d=\displaystyle\int_0^{6} g(x)\,\mathrm{d}x-6\mathrm{e}$. Déterminer le surplus des consommateurs arrondi à l'euro près.
   b) L'aire S_p du domaine hachuré représente en milliers d'euros, le surplus des producteurs. Déterminer le surplus des producteurs arrondi à l'euro près.

EXERCICE 16

PARTIE A - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2\ln(x)+1}{x}$.
On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.



1. a) Calculer $f'(x)$.

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
3. Montrer que, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
4. a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   On pourra remarquer que $f(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x) + \dfrac{1}{x}$.

   b) Soit $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Déterminer la valeur exacte de I, puis en donner une valeur approchée au centième près.

PARTIE B - Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Sa production pour ce type de pièces varie entre 1000 et 5000 pièces par semaine, selon la demande.
On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.
Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction f définie dans la partie B, avec x exprimé en milliers de pièces et $f(x)$ exprimé en euros.

1. Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1000 et 5000 pièces.
2. Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 € ?