Chapitre 2

Raisonnement par récurrence. Limite d'une suite

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Axiome de récurrence

Définition 1 : Soit une propriété $\mathcal{P}$ définie sur $\mathbb{N}$. Si :

- la propriété est **initialisée** à partir d'un certain rang n_0
- la propriété est **héréditaire** à partir d'un certain rang n_0 (c'est à dire que pour tout $n \geqslant n_0$ alors $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$)

Alors : la propriété est vraie à partir du rang n_0

1.2 Exemple

Démontrer que, pour tout entier naturel, la suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est telle que $0 < u_n < 2$

Initialisation : on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $0 < u_n < 2$, montrons que $0 < u_{n+1} < 2$.
La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ est croissante car composée de deux fonctions croissantes
$0 < u_n < 2 \quad \Leftrightarrow \quad f(0) < f(u_n) < f(2) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} < u_{n+1} < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < u_{n+1} < 2$
La proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

2 Limite d'une suite

Définition 2 : On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et l'on dit que la suite **converge** vers ℓ

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

On dit que la suite **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si à partir d'un certain rang, on a :

Théorème d'encadrement ou "des gendarmes"

$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Théorème de comparaison

- $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- $u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Suites géométrique : soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas

3 Opérations sur les limites

3.1 Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

3.2 Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞	F. ind.	∞

3.3 Limite d'un quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ'	∞
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	F. ind.	0	∞	F. ind.

4 Convergence d'une suite monotone

Définition 3 : On dit que la suite (u_n) est **majorée** si, et seulement si, il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$$

On dit que la suite(u_n) est **minorée** si, et seulement si, il existe un réel m tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$$

Si (u_n) est majorée et minorée, on dit que la suite est **bornée**.

Divergence
- Si une suite (u_n) est **croissante et non majorée** alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et non minorée** alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Convergence
- Si une suite (u_n) est **croissante et majorée** alors la suite (u_n) converge.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et minorée** alors la suite (u_n) converge.

Théorème du point fixe
Soit une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ.
Si la fonction associée f est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

On peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$

La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ.

La fonction f telle que : $f(x) = \sqrt{2 + x}$ est définie et continue sur $]-2; +\infty[$. Comme la suite (u_n) est convergente vers ℓ, d'après le théorème du point fixe, ℓ verifie l'équation $\ell = \sqrt{2 + \ell}$.
En élevant au carré, on trouve : $\ell^2 - \ell - 2 = 0$ qui admet deux solutions -1 et 2. Comme la suite (u_n) est positive, elle converge donc vers 2.