

Les nombres complexes

1 Définition

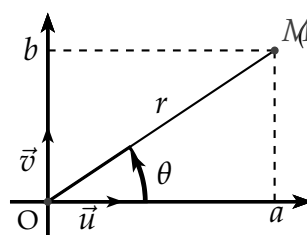
La forme algébrique d'un nombre complexe z est de la forme :

$$z = a + ib \quad \text{avec} \quad (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

La partie réelle de z : $\text{Re}(z) = a$

La partie imaginaire de z : $\text{Im}(z) = b$

Le module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



2 Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe z est noté $\bar{z} = a - ib$.

Pour tout z complexe, on a : $z\bar{z} = |z|^2$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad , \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' \quad , \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad , \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \quad , \quad z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$$

z réel alors : $z = \bar{z}$, z imaginaire pur alors : $z + \bar{z} = 0$

3 Second degré

Équation du second degré à coefficients réels dans \mathbb{C}

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{on a :} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \quad 2 \text{ racines réelles :} \quad \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \quad 1 \text{ racine double :} \quad \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \quad 2 \text{ racines complexes conjuguées :} \quad \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

4 Forme trigonométrique

La forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe z ($z \neq 0$) est de la forme :

$$z = r(\cos \theta) + i \sin \theta \quad \text{et} \quad z = r e^{i\theta}$$

$$\text{avec } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \arg(z) = \theta \quad [2\pi]$$

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

On a les relations : $i = e^{i \frac{\pi}{2}}$ et $-1 = e^{i\pi}$

$$|z z'| = |z| |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\text{formule de Moivre : } z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{i n\theta}$$

$$\text{formule d'Euler : } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\text{Si } z = r e^{i\theta} \quad \text{alors} \quad \bar{z} = r e^{-i\theta}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

5 Vecteur, alignement et orthogonalité

Soit les point A, B, C et D, on a :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ alors $AB = |z_B - z_A|$ et $(u, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
- \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ imaginaire pur.