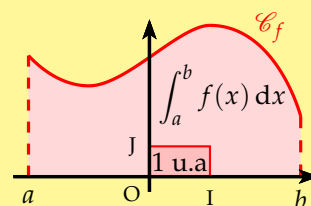


Intégrales et primitives

1 Aire sous une courbe

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a, b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. La mesure de l'aire, en u.a., sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre les abscisses a et b est donné par : $\mathcal{A} = \int_a^b f(t) dt$.



2 Primitives

Théorème fondamental Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. La fonction F définie par : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$

Primitives

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable et si $\forall x \in I$, on a : $F'(x) = f(x)$
- Si F_0 est une primitive de f sur un intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme : $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réel.
- Il existe une unique primitive F de f sur un intervalle I telle que pour les réels x_0 et y_0 , on a : $F(x_0) = y_0$
- Toute fonction **continue** sur un intervalle I **admet des primitives**.

Si F est une primitive quelconque d'une fonction f continue sur un intervalle I , alors pour tous réels a et b de I on a :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3 Calcul de primitives

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Primitive de la somme	$\int (u + v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un réel	$\int (ku) = k \int u$
Primitive de $u'u^n$	$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} = \ln u $
Primitive de $\frac{u'}{u^n} \quad n \neq 1$	$\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$
Primitive de $u(ax+b)$	$\int u(ax+b) = \frac{1}{a}U(ax+b)$

Recherche d'une primitive

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire,

on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

Exemple : Soit f définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(3x+6)^2}$

On pense à la forme $\frac{u'}{u^n}$ avec $n = 2$ dont une primitive est $\frac{-1}{u}$.

On écrit $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{(3x+6)^2}$.

Une primitive de f sur $] -2; +\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3x+6}$

Soit g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

La fonction g est de la forme $u'u$ donc une primitive est $\frac{1}{2}u^2$ d'où $G(x) = \frac{\ln x}{2}$

Calcul d'intégrale

Exemple : $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$

4 Propriétés de l'intégrale

- $\int_a^a f(x) dx = 0$ et $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$
- **relation de Chasles** $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$
- **Linéarité** $\int_a^b (af(x) + bg(x)) dx = a \int_a^b f(x) dx + b \int_a^b g(x) dx$

Sur un intervalle $[a, b]$

- Si $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si $f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$
- **Inégalité de la moyenne :**
Si $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Valeur moyenne

Si f est continue sur $[a; b]$, la valeur moyenne μ de f sur $[a; b]$ est égale à :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$