Rappels sur les suites. Algorithme

Généralités sur les suites

EXERCICE 1

La suite (u_n) est telle que : $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

a) Calculer à la main u_1, u_2, u_3. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

b) Écrire un algorithme en pseudo code donnant le terme u_n, n étant donné. Donner alors les valeurs de u_5, u_{10} et u_{15}.

c) Écrire un programme donnant les 10 premiers termes de la suite (u_n).

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2, \quad u_1 = 4 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$

a) Calculer à la main les termes u_2, u_3 et u_4.

b) Écrire un programme pour calculer le n ième terme de la suite. Faire l'application avec u_6 et u_{10}.

Variation d'une suite

EXERCICE 3

Déterminer les variations des suites suivantes définie sur $\mathbb{N}$:

a) $u_n = -3n + 1$ b) $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ c) $u_n = 2^n$ d) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

EXERCICE 4

Montrer que la suite (u_n) est décroissante pour $n \geqslant 2$: $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$

$n! =$ factorielle n et $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$

EXERCICE 5

Déterminer les variations des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}, \quad n \geqslant 4$ b) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 6

Montrer que la suite suivante est décroissante : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} - n$

Exercice 7

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

a) **Proposition 1 :** (u_n) et (v_n) sont deux suites croissantes, la suite $w_n = u_n + v_n$ est également croissante.

b) **Proposition 2 :** (u_n) et (v_n) sont deux suites croissantes, la suite $t_n = u_n \times v_n$ est également croissante.

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 8

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

a) Exprimer u_n en fonction de n si $u_0 = 2$ et $r = \dfrac{1}{2}$

b) $u_2 = 41$ et $u_5 = -13$. Calculer u_{20}

c) $u_1 = -2$ et $r = 3$. Calculer u_{20} puis $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$

d) $u_0 = -3$ et $r = -2$. Calculer u_{25} et u_{125} puis $S = u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$

Exercice 9

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n naturel par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$

a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n.

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est arithmétique.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 10

(u_n) est une suite géométrique de raison q.

a) $u_1 = 5$ et $q = \dfrac{2}{3}$. Exprimer u_n en fonction de n

b) $u_4 = 1$ et $u_9 = 25\sqrt{5}$. Calculer q puis u_{14}

c) $q = 2$ et $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{12} = 24\,573$. Calculer u_0.

Exercice 11

Prouver que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ est géométrique. Converge-t-elle ?

Exercice 12

Calculer les sommes suivantes puis vérifier votre résultat à l'aide d'un algorithme :

a) $\text{A} = 8 + 13 + 18 + \cdots + 2008 + 2013$

b) $\text{B} = \dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{3}{2} + 2 + \dfrac{5}{2} + \cdots + 10$

c) $\text{C} = 0,02 - 0,1 + 0,5 - 2,5 + \cdots + 312,5$

Suites arithmético-gométriques et homographique

EXERCICE 13

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout nombre entier } n \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$

a) Pour tout nombre entier naturel n , calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Étudier la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 14

Dans une réserve, une population initiale de 1 000 animaux évolue ainsi :
- 20 % des animaux disparaissent chaque année (bilan global des naissances et des décès)
- 120 animaux par an sont introduit dans la réserve.

Le but de cet exercice est de déterminer l'évolution de cette population au bout de n années (on la note p_n avec $p_0 = 1\,000$).

1) a) Déterminer une relation entre p_{n+1} et p_n.
   b) Conjecturer graphiquement à l'aide d'une calculatrice, l'évolution de la population.
   On pourra reporter les 5 premiers termes sur l'axes des abscisses.

2) Pour démontrer cette conjecture, on introduit une suite auxiliaire (v_n) telle que : $v_n = p_n - 600$
   a) Montrer que la suite (v_n) soit géométrique.
   b) Déterminer alors l'expression de v_n puis p_n en fonction de n.
   c) La suite p_n admet-elle une limite en $+\infty$. Conclusion.

EXERCICE 15

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

a) On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

EXERCICE 16

Antilles-Guyane sept 2010

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \ \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

   a) Calculer v_0.
   b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   d) Exprimer v_n en fonction de n.

3) On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

   a) Calculer w_0.
   b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
   d) Exprimer w_n en fonction de n.

4) Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$

5) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Faire un algorithme permettant de calculer S_n pour tout n de $\mathbb{N}$. Donner alors les valeurs approchées à 10^{-4} de S_6, S_{10} et S_{15}.
   Quelle conjecture sur la convergence de la suite (S_n) peut-on faire ?

   Remarque : On démontrera cette conjecture dans le prochain chapitre

Exercice 17

Extrait national 2009

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
2) Que peut-on faire comme conjecture sur la nature de la suite (w_n) ? Calculer w_{2009} en utilisant cette conjecture.

Exercice 18

Somme des carrés

On se propose de montrer que : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1) Déterminer un polynôme P de degré trois tel que pour tout réel x on ait : $P(x+1) - P(x) = x^2$

   Remarque : On écrira $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et on déterminera la valeur des coefficients a, b, c et d grâce à un système d'équations.

2) Compléter les égalités

$$\begin{aligned} P(1) - P(0) &= \\ P(2) - P(1) &= \\ P(3) - P(2) &= \\ \ldots \quad & \ldots \\ P(n+1) - P(n) &= \end{aligned}$$

3) En déduire alors la formule donnée pour la somme des carrés

Algorithme

Exercice 19

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{sinon} \end{cases}$

Écrire un algorithme qui pour une valeur x renvoie la valeur de $f(x)$.

Exercice 20

L'algorithme ci-contre permet de déterminer le coefficient directeur d'une droite passant par deux points d'abscisses différentes.

Variables : a, b, c, d, m réels
Entrées et initialisation
  Afficher "Saisir les coordonnées du point A"
  Lire a, b
  Afficher "Saisir les coordonnées du point B"
  Lire c, d
Traitement
  $\dfrac{d-b}{c-a} \to m$
Sorties : Afficher m

a) Compléter cet algorithme pour qu'il fournisse l'ordonnée à l'origine de cette droite

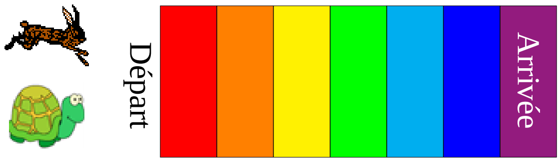
b) Programmer cet algorithme sur votre calculatrice

c) Cet algorithme ne prend pas en compte le cas d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
   Modifier cet algorithme pour que ce cas soit traité.

Exercice 21

Le lièvre et la tortue

Il s'agit d'un jeu qui se joue avec un dé sur un plateau de sept cases :



Les règles du jeu suivent l'algorithme ci-contre.

Remarque : T et L désignent les positions respectives de la tortue et du lièvre.

1) Rédiger la règle du jeu sous forme d'un texte court.
2) Programmer cet algorithme sur votre calculatrice. On désignera le lièvre et la tortue par des nombres.
3) Modifier et compléter cet algorithme pour réaliser une simulation de 1000 parties
4) L'un des deux protagonistes est-il avantagé par ces règles ? Si oui, modifier le nombre de cases du plateau pour rendre ce jeu le plus équitable possible

Variables : T, L, D entiers
G chaîne de caractères
Entrées et initialisation
  $0 \to T$
  $0 \to L$
Traitement
  tant que $T < 7$ *et* $L \neq 7$ **faire**
    D prend la valeur d'un jet de dé
    si $D = 6$ **alors**
      $L = 7$
      $G =$ "Lièvre"
    sinon
      $T = T + D$
    fin
    si $T \geqslant 7$ **alors**
      $G =$ "‘Tortue"
    fin
  fin
Sorties : Afficher « Le gagnant est : » G

Exercice 22

On considère l'algorithme ci-contre.

1) Justifier que pour $n = 3$, l'affichage est 11 pour u et 21 pour S
2) Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u				11		
S				21		

Variables : n, i entiers u, S réels
Entrées et initialisation
  Lire n
  $1 \to u$, $1 \to S$ et $0 \to i$
Traitement
  tant que $i < n$ **faire**
    $2u + 1 - i \to u$
    $S + u \to S$
    $i + 1 \to i$
  fin
Sorties : Afficher u, S

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1 - n$
Soit la suite (S_n) définie par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

3) Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1					
$u_n - n$	1					

Quelle conjecture peut-on faire à partir des résultats de ce tableau ?

4) Démontrer que : $u_n = 2^n + n$. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.