Correction contrôle de mathématiques
Du lundi 28 septembre 2015

Exercice 1

Variation d'une suite **(3 points)**

1) $$u_{n+1}-u_n = 2-\frac{3}{(n+1)^2+1}-\left(2-\frac{3}{n^2+1}\right)$$
$$= 2-2+\frac{-3(n^2+1)+3\left[(n+1)^2+1\right]}{(n^2+1)\left[(n+1)^2+1\right]}$$
$$= \frac{-3n^2-3+3n^2+6n+3+3}{(n^2+1)\left[(n+1)^2+1\right]}$$
$$= \frac{6n+3}{(n^2+1)\left[(n+1)^2+1\right]}$$

2) On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ \ 6n+3\geqslant 3>0$ et $(n^2+1)\left[(n+1)^2+1\right]\geqslant 2>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$
La suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2

Algorithme **(4 points)**

1) $u_1 = 1-1=0 \quad , \quad u_2 = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1\approx -0,293$

$$u_3 = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-3=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-2\approx -0,716$$

2) $u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-(n+1)$ donc

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-(n+1)+n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-1 \quad\Rightarrow\quad u_{n+1}=u_n+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-1$$

3) Voir ci-contre

4) On obtient le tableau suivant :

N	5	10	20	50
U	$-1,768$	$-4,979$	$-12,405$	$-37,248$

5) D'après le tableau de valeurs, on peut conjecturer que la suite est strictement décroissante et semble n'avoir pas de limite finie $(-\infty)$

Variables : N, I entiers
U réel
Entrées et initialisation
Lire N
$0\rightarrow U$
Traitement
pour I variant de 2 à N **faire**
$U+\dfrac{1}{\sqrt{I}}-1\rightarrow U$
fin
Sorties : A
fficher U

Exercice 3

ROC et suite arithmétique **(4 points)**

1) On écrit la somme dans le sens croissant et dans le sens décroissant. On fait alors la somme de ces deux écritures :

$$\begin{array}{l} S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \\ S_n = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \end{array}$$

Comme il y a n termes, on peut donc écrire : $2S_n = n(n+1) \quad \Leftrightarrow \quad S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2) a) $u_{16} = u_5 + (16-5)r \quad \Leftrightarrow \quad r = \dfrac{u_{16} - u_5}{11} = \dfrac{48 - 125}{11} = -7$

$u_5 = u_0 + 5r \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = u_5 - 5r = 125 + 35 = 160$

b) $u_n \leqslant -127 \quad \Leftrightarrow \quad u_0 + nr \leqslant 127 \quad \Leftrightarrow \quad 160 - 7n \leqslant -127 \quad \Leftrightarrow \quad -7n \leqslant -287 \quad \Leftrightarrow$

$n \geqslant 41$. À partir du terme 41, les termes sont inférieurs ou égaux à -127

c) S est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison -7 et de premier terme 160.

- Le nombre de termes vaut : $\dfrac{160-6}{7} + 1 = 23$
- $S = \text{Nbre de termes} \times \dfrac{\text{Somme termes extrèmes}}{2} = 23\left(\dfrac{160+6}{7}\right) = 1\,909$

Exercice 4

Intensité lumineuse **(4 points)**

1) Comme un rayon lumineux perd 23 % de son intensité en traversant une plaque de verre, elle en conserve donc 77 % donc $I_1 = 0,77\, I_0$

2) a) La n ième plaque de verre filtre 23 % de l'intensité qui y pénètre donc :

$I_n = 0,77\, I_{n-1}$

b) (I_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,77$ et de premier terme I_0

On a donc : $I_n = q^n\, I_0 = 0,77^n\, I_0$

c) Comme la raison q est compris entre 0 et 1, la suite (I_n) est strictement décroissante.

3) $I_4 = 0,77^4\, I_0 \quad \Leftrightarrow \quad I_0 = \dfrac{I_4}{0,77^4} = \dfrac{15,5}{0,77^4} \approx 44$ cd

4) On veut que : $I_n \leqslant 0,25\, I_0$ or $I_n = 0,77^n\, I_0$ donc on veut que $0,77^n \leqslant 0,25$.

Par essais successifs, on trouve : $I_5 \approx 0,27$ et $I_6 \approx 0,21$. À partir du rang 6, l'intensité de sortie est inférieure au quart de l'intensité d'entrée.

Exercice 5

Suite récurrente à deux termes **(5 points)**

1) $u_2 = 1,5u_1 - 0,5u_0 = 1,5 \times 2 - 0,5 \times 1 = 2,5$

$u_3 = 1,5u_2 - 0,5u_1 = 1,5 \times 2,5 - 0,5 \times 2 = 2,75$

$u_4 = 1,5u_3 - 0,5u_2 = 1,5 \times 2,75 - 0,5 \times 2,5 = 2,875$

2) Voir ci-après.

3) a)

Variables : N, I entiers
U, V, W réels
Entrées et initialisation
Lire N
$1 \rightarrow U$
$2 \rightarrow V$
Traitement
pour I variant de 2 à N **faire**
$1,5V - 0,5U \rightarrow W$
$V \rightarrow U$
$W \rightarrow V$
fin
Sorties : Afficher V

n	5	10	50
u_n	2,938	2,998	3,000

b) On peut faire comme conjecture que la suite (u_n) est croissante et converge vers 3.

4) $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n - u_{n+1} = 0,5(u_{n+1} - u_n) = 0,5v_n$
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,5,$ la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$.
On a donc : $v_n = 0,5^n$

5) ⚠ non demandé : On peut écrire les lignes suivantes que l'on additionnent :

$$\begin{aligned}
u_1 - u_0 &= v_0 \\
u_2 - u_1 &= v_1 \\
u_3 - u_2 &= v_2 \\
\dots \quad \dots &= \dots \\
u_n - u_{n-1} &= v_{n-1} \\
\hline
u_n - u_0 &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + u_0 \\
&= v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} + u_0 \\
&= \frac{1-0,5^n}{1-0,5} + 1 \\
&= 2(1-0,5^n) + 1
\end{aligned}$$

On a : $u_n = 3 - 2 \times 0,5^n$.
Comme la suite géométrique $(0,5^n)$ est décroissante alors la suite $(-2 \times 0,5^n)$ est croissante.
$\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$ par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$