Correction contrôle de mathématiques

Lundi 23 septembre 2013

Exercice 1

ROC **5 points**

1) On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$

   a) Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0. Déterminons la somme des $n+1$ premiers termes (de u_0 à u_n) de la suite.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= u_0 + (q \times u_0) + (q^2 \times u_0) + \cdots + (q^n \times u_0) \\ &= u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \end{aligned}$$

   On pose : $A_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$

   En soustrayant les deux lignes suivantes, on obtient :

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\ q \times A_n &= \phantom{1 +{}} q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} \\ \hline A_n - q \times A_n &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

   On obtient alors : $A_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

   Conclusion : On a donc $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n-1}}{1-q}$

   b) Application : S est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$. De plus on a : $1024 = 2^{10}$. On a donc 11 termes.

$$S = u_0 \frac{1 - q^{11}}{1-q} = \frac{1 - (2)^{11}}{1-2} = 2^{11} - 1 = 2047$$

2) a) La somme des $(n+1)$ premiers termes est :

$$S_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2} = \text{Nbre de termes} \frac{\Sigma \text{ termes extrèmes}}{2}$$

   b) La somme $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$ correspond à la somme des n premiers entiers impairs. On a :

$$S_n = n \frac{1 + (2n-1)}{2} = n^2$$

Exercice 2

Algorithme **4 points**

1) a) On trouve les valeurs suivantes :

n	2	3	4
u_n	0,625 0	0,375 0	0,265 6

   b) On trouve : $u_{100} \simeq 0{,}100\,0$ à 10^{-4} près. La suite suite (u_n) semble converger vers 0.

   c) Pour avoir tous les termes de u_2 à u_n, il faut déplacer l'instruction "Afficher U" juste avant le "FinPour".

2) On peut proposer l'algorithme suivant pour connaître le rang n pour lequel $u_n < 0,001$.

On trouve : Si $n \geqslant 1001$ alors $u_n < 0,001$

Variables
I entier naturel
U réel
Initialisation
$1,5 \to U$
Traitement
Tant que $U \geqslant 0,001$ faire
$I+1 \to I$
$\dfrac{(I-1)U+1}{2I} \to U$
FinPour
Afficher I

Exercice 3

Suite arithmético-géométrique **4 points**

1) a) On a :

$$u_1 = \frac{u_0}{4} + 3 = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{u_1}{4} + 3 = \frac{15}{16} + 3 = \frac{63}{16}$$

b) On teste la différence et le rapport de deux termes consécutifs avec les trois premiers termes :

$$u_1 - u_0 = \frac{15}{4} - 3 = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad u_2 - u_1 = \frac{63}{16} - \frac{15}{4} = \frac{3}{16}$$
$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{15}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{63}{16} \times \frac{4}{15} = \frac{21}{20}$$

Ni la différence, ni le quotient ne sont constants. La suite n'est ni arithmétique, ni géométrique

2) a) On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{u_n}{4} + 3 - 4 = \frac{u_n}{4} - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{4}$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -1$.

b) On a alors : $v_n = v_0 q^n = -\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $u_n = v_n + 4 = 4 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

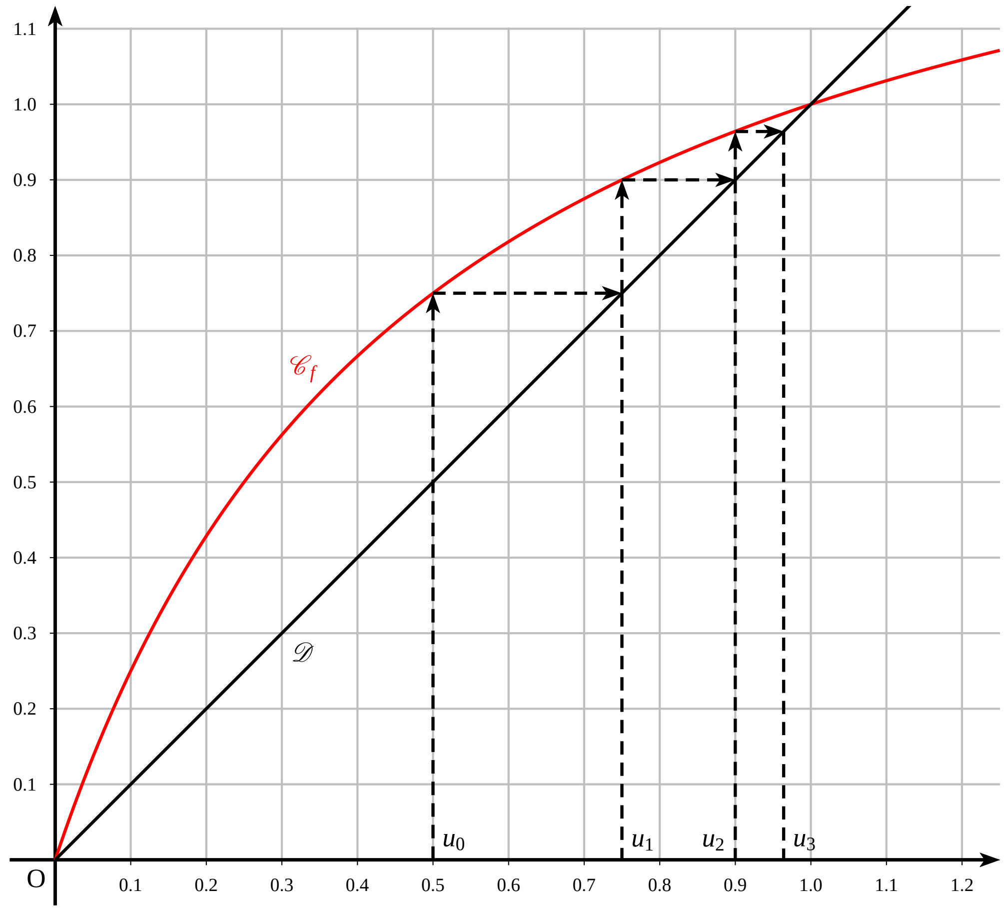
c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$. La suite (u_n) converge alors vers 4

Exercice 4

D'après le Bac 2013 **7 points**

1) a) $$u_1 = \frac{3u_0}{1+2u_0} = \frac{\frac{3}{2}}{1+1} = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{3u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{9}{4}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$$

b)



c) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers 1

2) a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \dfrac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} = \dfrac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$

on a : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 3.$ La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

b) On a : $v_n = v_0 q^n = 3^n$

c) De $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$ on a $v_n - u_n v_n = v_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n(1+v_n) = v_n$

On a alors : $u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n} = \dfrac{3^n}{1+3^n}$

d) On divise numérateur et dénominateur de u_n par 3^n pour obtenir : $u_n = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1.$ La suite (u_n) converge donc vers 1