Contrôle de mathématiques

Mercredi 18 octobre 2017

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli : $a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

En déduire alors que la suite (q^n), avec $q > 1$, diverge vers $+\infty$

EXERCICE 2

Limites de suites définies explicitement **(4 points)**

Déterminer et rédiger soigneusement les limites des suites (u_n) suivantes :

1) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n}$

2) $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n^2 - 1}$

3) $u_n = \dfrac{3n}{n+1} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

4) $u_n = 5^n - 4^n$

EXERCICE 3

Suite arithmético-géométrique **(4 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 6$
2) En déduire que la suite (u_n) est croissante.
3) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers ℓ.
4) Déterminer la limite ℓ.

EXERCICE 4

Suite auxiliaire **(3,5 points)**

On pose $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout n non nul $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}u_n$.

1) Calculer u_2, u_3, u_4
2) On pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ pour n non nul.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n avec n non nul.
   c) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n} = +\infty$, en déduire la limite ℓ de la suite (u_n).

EXERCICE 5

Tableau excel **(7 points)**

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Camille a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.

Une copie d'écran est donnée ci-contre.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1) Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

2) Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Camille obtient les résultats suivants :
Conjecturer les limites des suites :

$$(u_n) \text{ et } \left(\frac{u_n}{v_n}\right).$$

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Partie B : Étude des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3) En remarquant que $\dfrac{u_n}{v_n} = 3 + \dfrac{n-2}{2^n}$, démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

4) On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

   Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.