

Contrôle de mathématiques

Mardi 14 octobre 2014

EXERCICE 1

ROC

(2 points)

Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli : Soit un réel $a > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + a)^n \geq 1 + na$$

EXERCICE 2

Limite de suite

(4 points)

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n = \frac{4n^2 + 3n - 1}{2n + 1} - 2n + 3$

b) $u_n = \frac{n^2 + 5n + 7}{2 - n}$

c) $u_n = 2 - n + (-1)^n$

d) $u_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}$

EXERCICE 3

Suite monotone

(4 points)

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

- 1) Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2
- 2) On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2$
 - a) Montrer que : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$
 - b) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$
 - c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. Peut-on en déduire sa limite ?

EXERCICE 4

Vrai-Faux

(3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse. **Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.**

- a) La suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{2n + \cos n}{n}$ est convergente vers 2.
- b) Toute suite (v_n) à terme strictement positifs et décroissante converge vers 0.
- c) Toute suite (w_n) croissante diverge vers $+\infty$

EXERCICE 5

Suite homographique

(7 points)

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

- 1) a) Montrer que l'on peut écrire : $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n + 4}$
 b) Montrer par récurrence que pour tout n , $0 \leq u_n < 1$
- 2) On admet que la suite (u_n) est croissante.
 - a) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ
 - b) On admet que cette limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ où f est la fonction associée à la suite (u_n) telle que $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 4}$. Déterminer la valeur de ℓ
- 3) Soit la suite v_n définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ dont on déterminera le premier terme.
 - b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
 - c) Retrouver alors la limite de (u_n) déterminée au 2b)
- 4) On cherche à déterminer la valeur de N à partir de laquelle $|u_n - \ell| \leq 10^{-6}$. On propose alors l'algorithme suivant où certaines instructions ont été effacées.
 - a) Recopier cet algorithme et compléter les instructions effacées.
 - b) Quelle valeur de N donne cet algorithme ?
 - c) Que pensez-vous de la vitesse de convergence de la suite (u_n) ?

```

Variables : N : entier   U : réel
Entrées et initialisation
| 0 → N
| 0 → U
Traitement
| tant que |U - 1| ... faire
| | ..... → N
| | ..... → U
| fin
Sorties : Afficher N
    
```