Correction contrôle de mathématiques

Lundi 14 octobre 2013

Exercice 1

ROC **3 points**

a) Cf cours

b) Cf cours

Exercice 2

Limite de suite **3 points**

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes

a) Forme indéterminée. On change la forme

$$u_n = \frac{2n+1}{3n+5} = \frac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)} = \frac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{5}{n}}$$

On a alors : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3+\dfrac{5}{n} = 3 \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$

b) Forme indéterminée. On change la forme : $u_n = n\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{3}{n}\right)$

On a alors : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{3}{n} = 1 \end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$

c) On encadre u_n

$$-1 \leqslant \cos n \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad -1-\frac{1}{n} \leqslant -1+\frac{\cos n}{n} \leqslant -1+\frac{1}{n}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} -1-\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -1+\dfrac{1}{n} = -1$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$

d) Forme indéterminée. On divise numérateur et dénominateur par 4^n, on obtient alors :

$$u_n = \frac{4^n-3^n}{4^n+2^n} = \frac{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{4}\right)^n} = \frac{1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} < 1$

Par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

EXERCICE 3

Suite homographique **6 points**

1) a) On a

$$u_1 = \frac{u_0+2}{2u_0+1} = \frac{4}{5} = 0,800 \qquad u_2 = \frac{u_1+2}{2u_1+1} = \frac{14}{13} \simeq 1,077$$

$$u_3 = \frac{u_2+2}{2u_2+1} = \frac{40}{41} \simeq 0,976 \qquad u_4 = \frac{u_3+2}{2u_3+1} = \frac{122}{121} \simeq 1,008$$

b) Les valeurs de u_1 à u_4 sont alternativement inférieures et supérieures à 1. u_1 étant inférieur à 1, les valeurs de $u_1 - 1$ à $u_4 - 1$ sont du signe de $(-1)^n$.

c) On calcule :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1 = \frac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1} = \frac{-u_n+1}{2u_n+1}$$

d) Si $u_n - 1$ est du signe de $(-1)^n$, alors on a : $u_n - 1 = k_n(-1)^n$ avec $k_n > 0$.

Soit alors la proposition suivante :

$$P_n: \quad \forall \in \mathbb{N}, \quad u_n - 1 = k_n(-1)^n \quad \text{avec } k_n > 0$$

- **Initialisation :** $n = 0$, $u_0 - 1 = 1(-1)^0$. P_0 est vraie
- **Hérédité :** On suppose que $u_n - 1 = k_n(-1)^n$ avec $k_n > 0$,

  montrons que $u_{n+1} - 1 = k_{n+1}(-1)^{n+1}$ avec $k_{n+1} > 0$

  D'après 1c) :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n+1}{2u_n+1} = \frac{-(u_n-1)}{2u_n+1} = \frac{-k_n(-1)^n}{2u_n+1} = \frac{k_n}{2u_n+1}(-1)^{n+1} = k_{n+1}(-1)^{n+1}$$

  Comme pour tout n, $u_n > 0$ donc $2u_n + 1 > 0$ et comme $k_n > 0$, alors $k_{n+1} = \dfrac{k_n}{2u_n+1} > 0$.

  P_n est donc héréditaire.
- **Conclusion :** Par initialisation et hérédité la proposition P_n est vraie pour tout n. $u_n - 1$ est donc du signe de $(-1)^n$

2) a) On a :

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1} - 1}{\dfrac{u_n+2}{2u_n+1} + 1} = \frac{u_n+2-2u_n-1}{u_n+2+2u_n+1} = \frac{-u_n+1}{3u_n+3} = -\frac{1}{3} \times \frac{u_n-1}{u_n+1}$$

b) On a donc : $v_{n+1} = -\dfrac{1}{3}v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = -\dfrac{1}{3}$ la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3}$

On a alors : $v_n = v_0\, q^n = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

c) $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \Leftrightarrow \quad v_n u_n + v_n = u_n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad v_n u_n - u_n = -v_n - 1 \quad \Leftrightarrow$

$u_n(v_n - 1) = -v_n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n = \dfrac{-v_n - 1}{v_n - 1} = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$

On a alors : $u_n = \dfrac{1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$ par somme et quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 4

Vrai-Faux **2 points**

a) **Faux** Une suite peut être majorée sans pour antant être convergente. Soit par exemple la suite $u_n = 4 + (-1)^n$.

On a : $4 - 1 \leqslant u_n \leqslant 4 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leqslant u_n \leqslant 5$.

Tous les termes de la suite sont positifs et inférieurs ou égaux à 5.

Cependant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ n'existe pas. La suite (u_n) est donc divergente !

b) **Vrai** On applique le théorème de comparaison. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geqslant \dfrac{n}{2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2} = +\infty$, par comparaison on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

La suite (u_n) est donc divergente.

Exercice 5

Algorithme **5 points**

1) a)

n	2	5	10	20
u	1,250	1,464	1,550	1,596

b) Cet algorithme calcule la somme des inverses au carré de 1 jusqu'à N

2) a) On a : $S_1 = 1, \ S_2 = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}, \quad S_3 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{49}{36}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$

La suite (S_n) est donc croissante.

c) D'après la relation, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n} < 2$

La suite (S_n) est donc croissante et majorée par 2, elle est alors convergente vers une limite ℓ

d) On peut proposer l'algorithme suivant :

Variables
N entier et S réel
Initialisation
N prend la valeur 0
S prend la valeur 0
Traitement
Tant que $\left|S - \dfrac{\pi^2}{6}\right| \geqslant 10^{-2}$
    $N + 1 \to N$
    $S + \dfrac{1}{N^2} \to S$
Fin Tantque
Sortie
Afficher N

Bien prendre la valeur de π sur la calculette.

On trouve $N = 100$. La vitesse de convergence est très lente car il faut 100 termes pour avoir une précision de 10^{-2}.

On ne peut donc utiliser cet algorithme pour calculer les décimales de π^2