Contrôle de mathématiques

Mercredi 28 mars 2018

Exercice 1

Primitive et intégrale **(5 points)**

1) Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

   a) $f(x) = 3x - 1 - \dfrac{4}{(x+2)^2}$, $\quad \mathrm{I} =]-2\,;+\infty[$

   b) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

   c) $h(x) = (x-1)(x^2-2x-5)^2$, $\quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

2) a) Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5(1 - e^{-\frac{1}{2}x})$

   b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^2 5(1 - e^{-\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x$

Exercice 2

Intégrale **(3 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^x - e^{2x}$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) \geqslant 0$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 3

ROC **(2 points)**

1) Rappeler la définition de deux événements indépendants.

2) Démontrer que si les événements A et B sont indépendants, il en est de même pour les événements $\overline{\mathrm{A}}$ et B.

Exercice 4

Tablettes de chocolat **(5 points)**

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir.
À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

- A : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
- C : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1) Montrer que $P(\mathrm{C}) = 0,03x + 0,95$.
2) À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.
   Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.
3) Dans cette question, on prend $p(\mathrm{C}) = 0,96$.
   On prélève 10 tablettes de chocolat dans le stock de la chocolaterie, supposé suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilable à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire associée aux nombre de tablettes commercialisables.
   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b) Déterminer la probabilité que l'on trouve que des tablettes commercialisables.
   c) Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 2 tablettes non commercialisables.

EXERCICE 5

Stylos **(5 points)**

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1) On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.
   a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
   b) Calculer la probabilité des événements suivants :
      A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
      B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
      C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».
2) En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut. On prend au hasard un stylo dans la production. On note
   - D : « le stylo présente un défaut » ;
   - E : « le stylo est accepté après contrôle ».

   a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.
   b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.
   c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.
3) Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.
   On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés après contrôle.

a) Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

b) Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1) b). Quel commentaire peut-on faire ?