Contrôle de mathématiques

Jeudi 04 avril 2013

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

1) Démontrer que : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$

2) Application. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x \sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$

   a) Tracer l'allure de la fonction sur $\mathbb{R}^*$. Conjecturer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b) On pose $h = \dfrac{2}{x}$, déterminer alors $f(x)$ en fonction de h.

   c) Démontrer alors votre conjecture.

EXERCICE 2

Virus et test **(7 points)**

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{\mathrm{V}}$ et $\overline{\mathrm{T}}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1) a) Préciser les valeurs des probabilités $P(\mathrm{V})$, $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{T})$, $P_{\overline{\mathrm{V}}}(\overline{\mathrm{T}})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   b) En déduire la probabilité de l'évènement $\mathrm{V} \cap \mathrm{T}$.

2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.

3) a) Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Que peut-on en conclure.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 3

Ascenseur ou escalier **(8 points)**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1$^{\text{er}}$ niveau, 75 vont au 2$^{\text{e}}$ niveau et les autres vont au 3$^{\text{e}}$ niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2$^{\text{e}}$ niveau, les autres vont au 1$^{\text{er}}$ niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau. »
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1) Recopier et remplir le tableau d'effectifs suivants :

	N_1	N_2	N_3	Total
E				
$\overline{E}$				
Total				300

2) a) Déterminer la probabilité que la personne aille au 2$^{\text{e}}$ niveau par l'escalier. (On donnera la réponse sous forme de fraction)

   b) Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

   c) Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2$^{\text{e}}$ niveau.

3) On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

   On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2$^{\text{e}}$ niveau.

   a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X. (On se justifiera)

   b) Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2$^{\text{e}}$ niveau. On donnera auparavant la formule exacte.

   c) En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2$^{\text{e}}$ niveau ? (On arrondiera à l'entier le plus proche)

4) Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2$^{\text{e}}$ niveau » soit supérieure ou égale à $0,99$.

EXERCICE 4

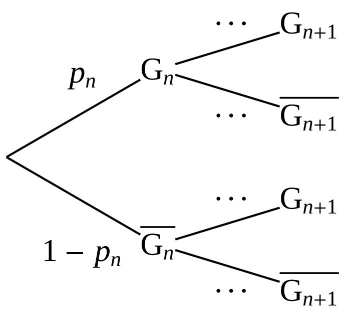
Jeu en ligne **(3 points)**

Un site internet propose un jeu en ligne dont les probabilités sont les suivantes :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante vaut $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante vaut $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3) Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

   a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

   b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

   c) Déterminer la limite de p_n.