Rappels de probabilité
Probabilité conditionnelle
Loi binomiale

Table des matières

1 Rappels

1.1 Définitions

Expérience aléatoire : Protocole précis dont on ne peut prévoir l'issue mais qui peut être vérifiée.

Exemples :

1) Lancer un dé à 6 faces.
2) Tirer simultanément 2 boules dans une urne qui en contient 8.
3) Distribuer 5 cartes à un joueur avec un jeu de 32 cartes.
4) Poser une question à un lycéen choisi au hasard.

Univers : Ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire. On le note : Ω. On a alors : $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Exemple : Si on lance un dé à six faces, on a : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Événement : Sous ensemble de l'ensemble univers Ω.

Exemple : Soit l'événement : « obtenir un nombre pair avec le lancement d'un dé ». On a alors : $E = \{2, 4, 6\}$

Événement élémentaire : Événement qui ne contient qu'un seul élément. On le note alors e_i.

Événement certain : C'est l'univers, Ω.

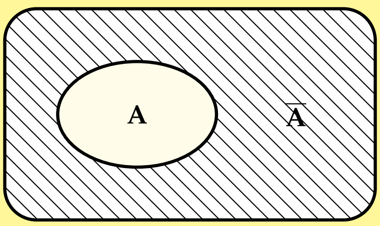
Événement impossible C'est l'ensemble vide, $\varnothing$.

1.2 Opération sur les événements

Remarque : L'étude des probabilités fait appel à la logique mathématique : en effet il s'agit de décoder dans la logique d'un texte les éléments qui serviront aux calculs de probabilités. Les mots les plus importants sont les conjonctions "*et*", "*ou*", et la négation "*ne... pas*" Cette logique mathématique fait appel à l'étude des opérations sur les ensembles. Pour cette raison on définit les opérations suivantes : le complémentaire, l'intersection et l'union. On donnera enfin d'autres opérations qui peuvent se décomposer à l'aide de ces trois opérations de base.

1.2.1 Événement contraire

Définition 1 : On appelle événement contraire d'un événement A, l'événement noté $\overline{A}$ composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

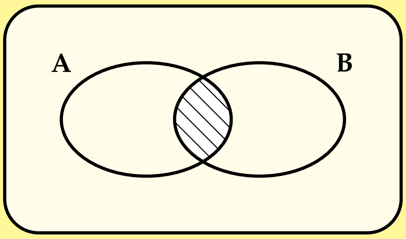


$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Omega \quad \text{et} \quad x \notin A$$

Exemple : On lance un dé parfait. On appelle A l'événement "obtenir un 6". On a donc l'événement contraire $\overline{A}$ l'événement "ne pas obtenir 6 "

1.2.2 Intersection de deux événements

Définition 2 : On appelle l'intersection de deux événements A et B, l'événement noté $A \cap B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A et à B. On a alors le schéma suivant :



$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$ et $x \in B$

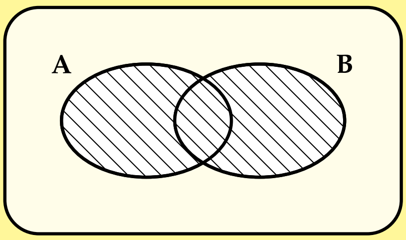
On dit que les événements A et B sont **incompatibles** si et seulement si : $A \cap B = \varnothing$

Exemple : On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Soient les événements
- A : "obtenir deux cœurs"
- B : "obtenir au moins une dame"

L'événement $A \cap B$ est donc : "obtenir la dame de cœur et un autre cœur"

1.2.3 Union de deux événements

Définition 3 : On appelle union de deux événements A et B, l'événement noté $A \cup B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A ou (non exclusif) à B. On a alors le schéma suivant :



$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$ ou $x \in B$

On dit que les événements A et $\overline{A}$ forment une **partition** de Ω car : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$

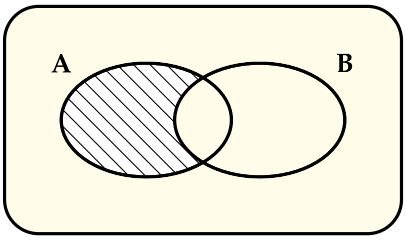
Exemple : On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Soient les événements
- A : "obtenir deux cartes de même valeur"
- B : "obtenir un roi"

L'événement $A \cup B$ est donc : "obtenir deux cartes de même valeur ou un roi et une autre carte de valeur différente"

1.2.4 Autres opérations et lois de Augustus De Morgan

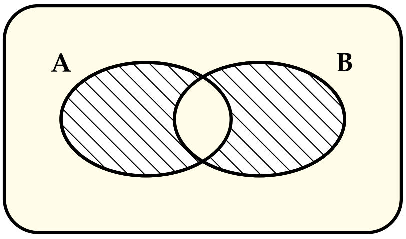
Les opérations peuvent se définir à l'aide du complémentaire, de l'intersection et de l'union de deux ensembles.

- Différence entre deux ensembles : $A - B$



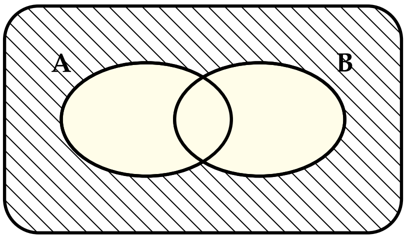
$$x \in A - B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \cap \overline{B}$$

- Différence symétrique entre deux ensembles ("*ou*" exclusif) : $A \Delta B$

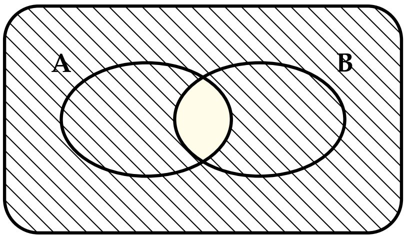


$$x \in A \Delta B \quad \Leftrightarrow \quad (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

- **Lois de Augustus De Morgan** : $\begin{cases} \text{non(A } \textbf{ou} \text{ B)} = \text{non(A) } \textbf{et} \text{ non(B)} \\ \text{non(A } \textbf{et} \text{ B)} = \text{non(A) } \textbf{ou} \text{ non(B)} \end{cases}$



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Remarque : À l'aide de cette dernière égalité, on pourrait définir l'intersection uniquement à l'aide du complémentaire et de l'union

$$A \cap B = \overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

1.3 Probabilité

Définition 4 : On appelle loi de probabilité sur un ensemble Ω, la fonction P à valeur dans $[0;1]$ définie par les conditions suivantes :

1) $P(\Omega) = 1$

2) Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On peut alors démontrer les propriétés suivantes

Propriété 1 : Soit $e_1,\ e_2,\ \dots, e_n$ les n événements élémentaires de l'univers Ω.
De la définition précédente, on en déduit :
1) $P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$
2) $P(\varnothing) = 0$
3) Pour tous événements A et B, on a les relations :
   a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
   b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemples :
1) On lance un dé truqué. Après un relevé statistique, on a pu déterminer que les probabilités d'apparition de chaque face sont telles que :
$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) \quad \text{et} \quad p(6) = 3 \times p(1)$$
Calculer la probabilité d'apparition de chaque face
2) On donne les probabilités suivantes pour les événements A et B :
$$P(A) = 0,3, \quad p(A \cup B) = 0,7 \quad \text{et} \quad p(A \cap B) = 0,2$$
Calculer $P(\overline{B})$

1) Il n'y a que deux probabilités à déterminer : $p(1)$ et $p(6)$. On a :
$$\begin{cases} p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 \\ p(6) = 3 \times p(1) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 8\,p(1) = 1 \\ p(6) = 3 \times p(1) \end{cases}$$
On obtient donc : $p(1) = \dfrac{1}{8}$ et $p(6) = \dfrac{3}{8}$.
2) On calcule d'abord $P(B)$:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \Leftrightarrow \quad P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$$
On obtient alors : $P(B) = 0,7 - 0,3 + 0,2 = 0,6$
On calcule ensuite : $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,6 = 0,4$

1.4 Loi équiprobable

Définition 5 : On appelle loi de probabilité équirépartie, la loi de probabilité où chaque événement élémentaire a la même probabilité d'apparition (équiprobabilités).
Si Ω se décompose en n événements élémentaires, on a :
$$\forall i \in (1, 2, \dots, n) \quad \text{on a :} \quad P(e_i) = \frac{1}{n}$$

Exemple : Pour un dé à jouer équilibré, chaque face a une probabilité de $\dfrac{1}{6}$ d'apparition.

Théorème 1 : Dans une loi équirépartie, la probabilité de l'événement A vérifie :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Remarque : Lorsque la loi de probabilité est équirépartie, le calcul de la probabilité revient à un problème de dénombrement. On peut alors utiliser pour dénombrer les différents cas : un arbre, un tableau double entrée, diagramme de Venn, une liste,...

Exemple : Une urne contient 6 boules : 4 rouges (numérotées de 1 à 4) et 2 bleues (numérotées 5 et 6). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note sa couleur. Calculer la probabilité des événements suivants :
R "tirer deux boules rouges"
C "tirer deux boules de même couleur"

Calculons d'abord le nombre de tirages possibles. On cherche ici des paires. Faisons la liste
$\{1,2\},\{1,3\},\dots,\{1,6\}$ 5 choix, $\{2,3\},\{2,4\},\dots,\{2,6\}$ 4 choix,

$\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\}$ 3 choix, $\{4,5\},\{4,6\}$ 2 choix et $\{5,6\}$ 1 choix

Il y a en tout : $5+4+3+2+1 = 15$ tirages possibles

Pour avoir R il ne faut utiliser que les numéros de 1 à 4.

Il y a donc : $3+2+1 = 6$ choix

On a donc : $P(\text{R}) = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

Soit B "obtenir deux boules bleues".
Il n'y a qu'un choix possible, donc $P(\text{B}) = \dfrac{1}{15}$

On a alors : $P(\text{C}) = P(\text{R} \cup \text{B}) = P(\text{R}) + P(\text{B}) = \dfrac{6}{15} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{7}{15}$

1.5 Variable aléatoire

Définition 6 : Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer à chaque issue e_i de Ω un nombre x_i

Définir une loi de probabilité de X consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité $P(X = x_i) = p_i$

On a alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Définition 7 : On appelle **l'espérance mathématique** de la variable X, la quantité notée $\mathrm{E}(X)$ définie par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

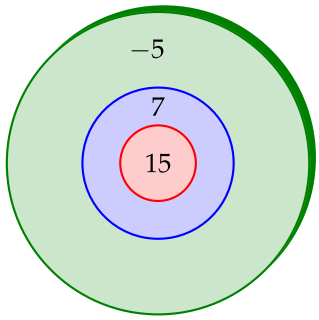
On appelle variance et écart-type de la variable X, les quantités notées respectivement $\mathrm{V}(X)$ et $\sigma(X)$ définies par :

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \mathrm{E}^2(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque : L'espérance mathématique correspond à une moyenne des valeurs prises, pondérées par les probabilités de la loi définie sur X. Si, par exemple, X représente le gain pour un jeu, $\mathrm{E}(X)$ représente le gain moyen que peut espérer le joueur. On dit alors que si $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur et si $\mathrm{E}(X) < 0$, le jeu est favorable à l'organisateur.

Exemple : Dans un jeu de fléchettes, la cible est constituée de disques de rayons respectifs 5,10 et 20 cm.

Un joueur atteint toujours la cible et on admet que la probabilité qu'il atteigne une zone de cette cible est proportionnelle à l'aire de cette zone. Lorsqu'il atteint la zone rouge, il gagne 15 €, lorsqu'il atteint la couronne bleue, il gagne 7 €. En revanche si la fléchette atteint la couronne verte, il perd 5 €.



On appelle X la variable aléatoire qui indique le gain du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

c) Calculer la variance et l'écart type de X

$\Rightarrow \Rightarrow$

a) Comme les probabilités des différentes zones sont proportionnelles à leur surface, il faut donc calculer les surfaces de ces différentes zones (en cm^2) :

- La surface totale de la cible : $S_c = \pi \times 20^2 = 400\pi$
- La surface du disque rouge central : $S_r = \pi \times 5^2 = 25\pi$
- La surface de la couronne bleue : $S_b = \pi \times (10^2 - 5^2) = 75\pi$
- La surface de la couronne verte : $S_v = \pi \times (20^2 - 10^2) = 300\pi$

On obtient les probabilités suivantes :

$P(X = 15) = \dfrac{25\pi}{400\pi} = \dfrac{1}{16}$ $\qquad$ $P(X = 5) = \dfrac{75\pi}{400\pi} = \dfrac{3}{16}$

$$P(X=-5) = \frac{300\pi}{400\pi} = \frac{3}{4}$$

On obtient alors le tableau suivant :

X	-5	7	15
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

b) L'espérance est alors :

$$\mathrm{E}(X) = -5 \times \frac{3}{4} + 7 \times \frac{3}{16} + 15 \times \frac{1}{16} = \frac{-60+21+15}{16} = -\frac{24}{16} = -1,5$$

Comme l'espérance de X est négative, le jeu n'est pas favorable au joueur. En effet, en moyenne, il peut espérer perdre 1,5 €.

c) La variance et l'écart-type :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= (-5)^2 \times \frac{3}{4} + 7^2 \times \frac{3}{16} + 15^2 \times \frac{1}{16} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{300+147+225-36}{16} \\ &= \frac{636}{16} = \frac{159}{4} = 39,75 \quad \text{ainsi} \quad \sigma(X) = \sqrt{39,75} \simeq 6,30\end{aligned}$$

1.6 Propriétés de l'espérance et de la variance

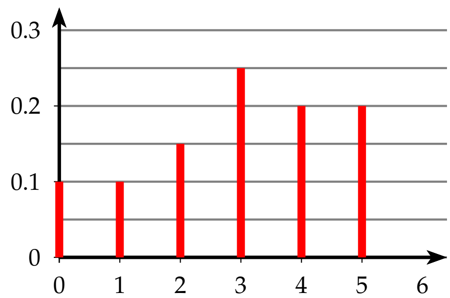
Propriété 2 : X est une variable aléatoire d'espérance $\mathrm{E}(X)$ et de variance $\mathrm{V}(X)$. Alors pour tous réels a et b, on a :

$$\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X) + b \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$$

Remarque : Le calcul de l'espérance est donc une opération linéaire.

Exemple : Un professionnel vend des fauteuils.

Sa commission est de 200 € par fauteuils vendu, et ses frais sont de 280 € par jour. Un étude statistique a montré que la variable aléatoire X qui indique le nombre x de fauteuils vendus par jour suit la loi représentée ci-contre. On note Y la variable aléatoire donnant le gain journalier du vendeur.



a) Donner la relation entre X et Y.

b) Quelle est la probabilité que le vendeur soit en déficit à la fin de la journée ?

c) Quel gain moyen journalier peut-il espérer ?

a) On a : $Y = 200X - 280$

b) $Y < 0 \quad \Leftrightarrow \quad X < \dfrac{280}{200} = 1,4 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0 \quad \text{ou} \quad X = 1$

$$P(Y < 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

c) On calcule d'abord $\mathrm{E}(X)$

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,1 + \cdots + 5 \times 0,2 = 2,95$$

On en déduit alors : $\mathrm{E}(Y) = 200 \times 2,95 - 280 = 310$

Le vendeur peut donc espérer gagner 310 € par jour.

Remarque : On peut calculer la variance et l'écart type de Y. On a :

$$\mathrm{V}(X) = 0,1 \times 0^2 + \cdots + 0,2 \times 5^2 - (2,95)^2 = 2,45$$

On obtient alors : $\begin{array}{l} \mathrm{V}(Y) = 200^2\,\mathrm{V}(X) = 97\,900 \\ \sigma(Y) = \sqrt{97\,900} \simeq 312,89 \end{array}$

2 Probabilité conditionnelle

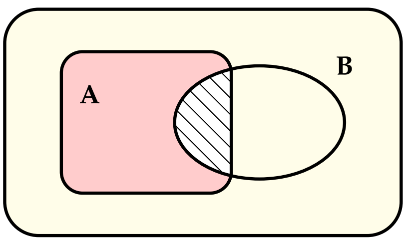
2.1 Définition

Le but de ce paragraphe est d'étudier la probabilité d'un événement B conditionné par un événement A.

Définition 8 : Lorsque $P(\mathrm{A}) \neq 0$, on note $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ la probabilité d'avoir l'événement B sachant que l'événement A est réalisé. On a alors la relation suivante :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

Remarque : La probabilité de B sachant A correspond à la part de B dans A, c'est à dire la part hachurée dans l'ensemble A

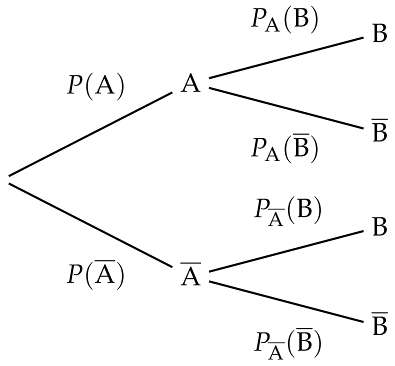


La probabilité de B sachant A correspond à la part de l'ensemble B dans l'ensemble A

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\text{Nbre d'éléments communs à A et B}}{\text{Nbre d'élément de A}} = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

2.2 Représentation par un arbre pondéré

Soient deux événements A et B. On peut représenter par un arbre pondéré les probabilités suivantes lorsque l'on connaît les probabilités de B ou $\overline{\text{B}}$ lorsque A est réalisé.



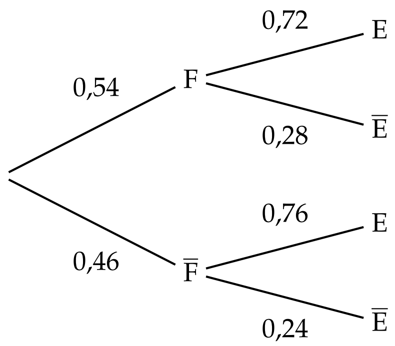
Exemple : Dans un lycée 54 % des élèves sont des filles dont 72 % sont externes. De plus, 76 % des garçons sont externes. On choisit un élève au hasard.

On pose :
- F : « l'élève choisi est une fille »
- E : « l'élève choisi est externe »

On traduit les données à l'aide de probabilités. On a :

$$P(\text{F}) = 0,54, \quad P_{\text{F}}(\text{E}) = 0,72, \quad P_{\overline{\text{F}}}(\text{E}) = 0,76$$

On obtient alors l'arbre ci-contre :



Remarque : On note la probabilité qu'une fille soit externe : $P_{\text{F}}(\text{E})$.

Propriété : Pour remplir et utiliser un arbre, on a les propriétés suivantes :

- Sur chaque branche de l'arbre, on écrit les probabilités correspondantes (attention pas de pourcentage).
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin. Par exemple la probabilité d'avoir une fille externe :
  $P(\text{F}) \times P_{\text{F}}(\text{E}) = P(\text{F} \cap \text{E}) = 0,54 \times 0,72 = 0,3888$
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement. Par exemple la probabilité d'avoir un élève externe :

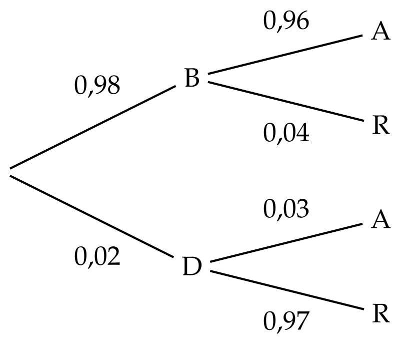
$$\begin{aligned} P(\text{E}) &= P(\text{E} \cap \text{F}) + P(\text{E} \cap \text{G}) \\ &= 0,54 \times 0,72 + 0,46 \times 0,76 \\ &= 0,7384 \end{aligned}$$

Autre exemple : Dans un atelier, il y a 2% de pièces défectueuses. On effectue un test pour savoir si on doit accepter ou refuser une pièce. On a observé que :
- Si la pièce est bonne, elle est acceptée par ce test à 96%.
- Si la pièce est défectueuse, elle est refusée par ce test à 97%.

Quel est le pourcentage de retour client ?

On appelle les événement suivants :
B : "la pièce et bonne",
D : " la pièce est défectueuse",
A "la pièce est acceptée",
R "la pièce est refusée".

On construit l'arbre ci-contre



On doit calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée :

$$P(\mathrm{D} \cap \mathrm{A}) = 0,02 \times 0,03 = 0,0006$$

On peut s'attendre à 0,06% de retour client.

Théorème 2 : Probabilités totales

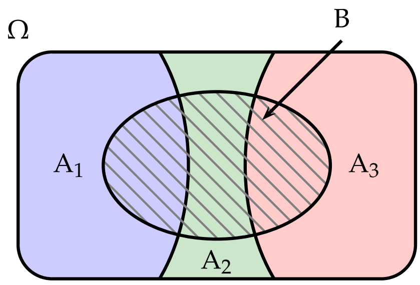
Soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de l'univers Ω (ensembles deux à deux incompatibles et dont l'union forme Ω), alors, pour tout événement B, on a :

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + \cdots + P(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B})$$

Par exemple pour une partition de Ω en trois ensembles : A_1, A_2 et A_3.

On a alors :

$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_3 \cap \mathrm{B})$.



Remarque : Dans la plupart des cas, on utilise la partition A et $\overline{\mathrm{A}}$. Dans un arbre, le nombre n d'ensembles formant une partition donne le nombre de branches issues d'un nœud.

2.3 Événements indépendants

Définition 9 : On dit que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}) \quad \text{ou lorsque } P(\mathrm{A}) \neq 0 \quad P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$$

Remarque : On dit que les événements sont indépendants car qu'importe que l'événement A soit réalisé ou non, la probabilité de B ne dépend pas de A.

Exemple : Une association de 96 membres propose différentes activités à ses adhérents dont l'aviron et le badminton. Douze membres s'inscrivent pour l'aviron, trente-deux pour le badminton dont quatre pour les deux.
On prend au hasard la fiche d'un adhérent.

On note A et B les événements :
- A « l'adhérent est inscrit pour l'aviron » ;
- B « l'adhérent est inscrit pour le badminton ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ? En est-il de même pour A et $\overline{\text{B}}$?

On peut représenter les événements dans un tableau double entrée ci-contre

	A	$\overline{\text{A}}$	Total
B	**4**	28	**32**
$\overline{\text{B}}$	8	56	64
Total	**12**	84	**96**

On calcule les probabilités suivantes : $P(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{4}{96} = \dfrac{1}{24}$

$P(\text{A}) \times P(\text{B}) = \dfrac{12}{96} \times \dfrac{32}{96} = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{24}$

On a bien $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$, les événements A et B sont donc indépendants.

De même : $P(\text{A} \cap \overline{\text{B}}) = \dfrac{8}{96} = \dfrac{1}{12}$ et $P(\text{A}) \times P(\overline{\text{B}}) = \dfrac{12}{96} \times \dfrac{64}{96} = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{12}$

On a bien $P(\text{A} \cap \overline{\text{B}}) = P(\text{A}) \times P(\overline{\text{B}})$, les événements A et $\overline{\text{B}}$ sont donc indépendants.

Théorème 3 : Si les événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour :

1) $\overline{\text{A}}$ et B 2) A et $\overline{\text{B}}$ 3) $\overline{\text{A}}$ et $\overline{\text{B}}$

ROC **Démonstration :**

1) A et $\overline{\text{A}}$ forment une partition de l'univers Ω, donc :

$$P(\text{B}) = P(\text{A} \cap \text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B})$$

A et B sont indépendants donc : $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A})P(\text{B})$.

On a donc :

$$P(\text{B}) = P(\text{A})P(\text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) \quad \Leftrightarrow \quad P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = P(\text{B})(1 - P(\text{A})) = P(\text{B})P(\overline{\text{A}})$$

$\overline{\text{A}}$ et B sont indépendants.

2) La démonstration est analogue (échanger A et B)

3) D'après 1) $\overline{\text{A}}$ et B sont indépendants, donc d'après 2), $\overline{\text{A}}$ et $\overline{\text{B}}$ sont indépendants.

3 Loi binomiale

3.1 Conditions

Épreuve de Bernoulli : expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : succès ou échec. On appelle p la probabilité de succès et $q = 1 - p$ la probabilité d'échec.

Schéma de Bernoulli d'ordre n : expérience aléatoire qui est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
On définit alors la variable aléatoire X représentant le nombre de succès.

3.2 Loi binomiale de paramètres n et p

Théorème 4 : Dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre de succès est définie par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$

Remarque :

- $\binom{n}{k}$ est un coefficient binomial.
  Il correspond au nombre de possibilités de placer k succès sur n expériences.
- Pour le calculer avec la calculatrice : taper n puis aller dans math, onglet PRB puis choisir 3 : Combinaison, taper enfin k.
  Par exemple pour calculer $\binom{10}{4}$: 10 Combinaison 4 . On trouve 210.

Exemple :

- On lance 10 fois de suite un dé cubique.
  1) Quelle est la probabilité d'obtenir **exactement** quatre fois un 6
  2) Quelle est la probabilité d'obtenir **au moins** 4 fois un 6

1) Cette expérience peut se ramener à la loi binomiale pourvu que l'on lance le dé toujours de la même façon. Les expériences sont indépendantes et chaque expérience a deux issues : soit faire un 6 ($p = \frac{1}{6}$) soit ne pas faire de 6 ($q = \frac{5}{6}$). Il s'agit donc d'une loi $\mathscr{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$. On a alors :

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6 \simeq 0{,}054\,3$$

Pour obtenir cette probabilité avec la calculatrice : [distrib] choisir 0 : binomFdp.
On tape alors binomFdp(10,$\frac{1}{6}$,4)

2) Si l'on veut obtenir au moins 4 fois un 6, on doit calculer :

$$P(X \geqslant 4) = P(X = 4) + \cdots + P(X = 10) = 1 - P(X \leqslant 3) \simeq 0{,}069\,7$$

Pour obtenir cette probabilité, on passe par la deuxième expression $P(X \leqslant 3)$ qui correspond à la distribution A : binomFRép . On tape alors $1 - \text{binomFRép}(10, \frac{1}{6}, 3)$

Si l'on cherche à vérifier par l'expérience ces probabilités, il est nécessaire d'effectuer ces 10 lancers un grand nombre de fois. Réaliser par exemple 100 fois ces 10 lancers de dé, risque de prendre bien trop de temps. On a alors recours à une simulation avec une calculatrice. La fonction *random* en anglais qui donne "*Aléa*" pour hasard en français, permet de générer un nombre pseudo aléatoire dans l'intervalle $]0\,;\,1[$.
Pour générer un nombre entier entre 1 et 6, simulation d'un lancer de dé, on fabrique alors la fonction $E\,(6 \times Random + 1)$, partie entière de 6 fois le nombre aléatoire plus 1. Sur la calculatrice cela correspond à "*EntAléa*(1,6)" que l'on trouve dans math de l'onglet PRB dans le choix 5.
On peut alors proposer pour 100 simulations de 10 lancers de dé, l'algorithme suivant si l'on cherche la probabilité d'obtenir au moins 4 fois un 6.

Pour 5 compilations, on trouve par exemple les résultats suivants :

$$3 \;-\; 10 \;-\; 13 \;-\; 8 \;-\; 4$$

soit une moyenne de 7,6.

La probabilité correspondante est alors : $\dfrac{7,6}{100} = 0,076$

L'ordre de grandeur de la probabilité est confirmé, cependant le nombre d'expériences n'est pas encore assez important pour valider la probabilité de 0,0697.

```
Variables : I, J, X, R, K   réels
Entrées et initialisation
 | 0 → K
Traitement
 | pour I de 1 à 100 faire
 |  | 0 → X
 |  | pour J de 1 à 10 faire
 |  |  | E(6 × Random + 1) → R
 |  |  | si R = 6 alors
 |  |  |  | X + 1 → X
 |  |  | fin
 |  | fin
 |  | si X ⩾ 4 alors
 |  |  | K + 1 → K
 |  | fin
 | fin
Sorties : Afficher K
```

3.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Théorème 5 : Pour tous entiers naturels n et k, tels que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

1) $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$

2) $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$

3) $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$

4) $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$

Exemple : $\dbinom{7}{0} = \dbinom{7}{7} = 1, \quad \dbinom{8}{1} = \dbinom{8}{7} = 8, \quad \dbinom{6}{2} = \dbinom{6}{4} = 15$

Remarque : On a la troisième égalité car placer k succès parmi n expériences revient à placer $n-k$ échecs parmi n expériences

Pour comprendre la quatrième égalité, on décompose la répartition de $k+1$ succès sur $n+1$ expériences de la façon suivante :

- Soit il y a succès à la première expérience. Il faut alors répartir k succès sur les n expériences restantes soit $\binom{n}{k}$
- Soit il y a échec à la première expérience. Il faut alors répartir $k+1$ succès sur les n expériences restantes soit $\binom{n}{k+1}$

Triangle de Pascal

La dernière formule est appelée **formule de Pascal** car elle permet de calculer de proche en proche les coefficients du triangle de Pascal :
On a pour les cases rouges :

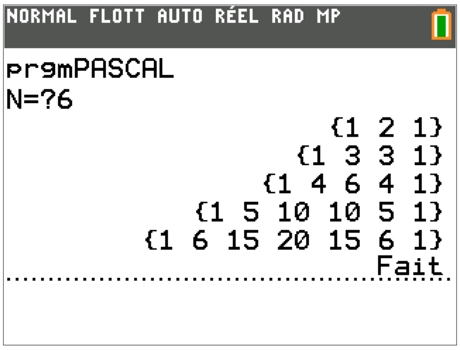
$$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=\binom{5}{2}$$

ce qui donne $4+6=10$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

On peut proposer l'algorithme suivant permettant de déterminer le triangle de Pascal. On utilise un double compteur permettant de déterminer la ligne $i+1$ en fonction de la ligne i.

On obtient pour $N=6$ l'écran suivant



Variables : L_1, L_2 listes
N, I, K entiers
Entrées et initialisation
Lire N $(N \geqslant 2)$
Effacer L_1 et L_2
$1 \to L_1(1)$
$1 \to L_1(2)$
$1 \to L_2(1)$
Traitement
pour I de 2 à N **faire**
pour K de 2 à I **faire**
$L_1(K-1)+L_1(K) \to L_2(K)$
fin
$1 \to L_2(I+1)$
pour K de 2 à $(I+1)$ **faire**
$L_2(K) \to L_1(K)$
fin
Sorties : Afficher L_1
fin

3.4 Représentation de la binomiale

3.4.1 Représentation symétrique

On lance 8 fois une pièce de monnaie. Déterminer et représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de « piles » obtenus.

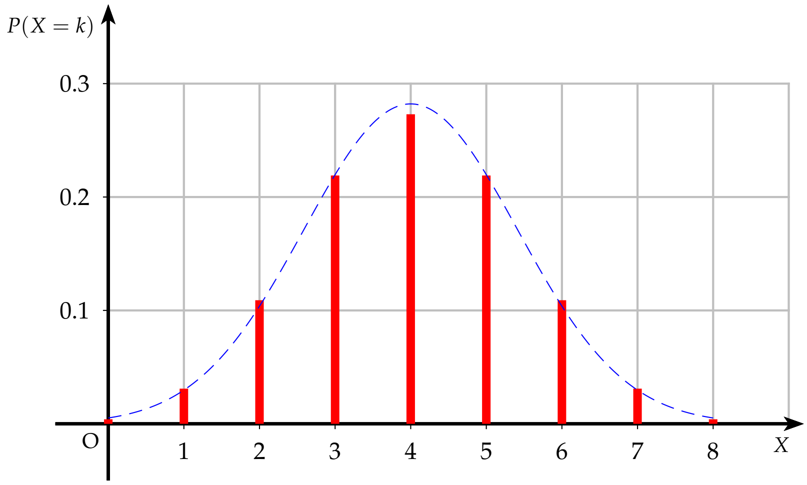
Les 8 lancés sont à priori indépendants car la pièce est lancée toujours de la même façon. La probabilité sur un lancé d'obtenir « pile » est de 0,5 (on suppose que la pièce est équilibrée). On obtient alors :

$$P(X = k) = \binom{8}{k} 0,5^k 0,5^{8-k} = \binom{8}{k} 0,5^8$$

On obtient les différentes valeurs avec la calculatrice avec la fonction :
binomFdp(8,0.5)
On obtient alors le tableau de la loi de probabilité (à 10^{-3}) suivant :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	0,004	0 031	0,109	0,219	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004

On obtient la représentation de la loi binomiale $\mathscr{B}(8; 0,5)$ suivante :



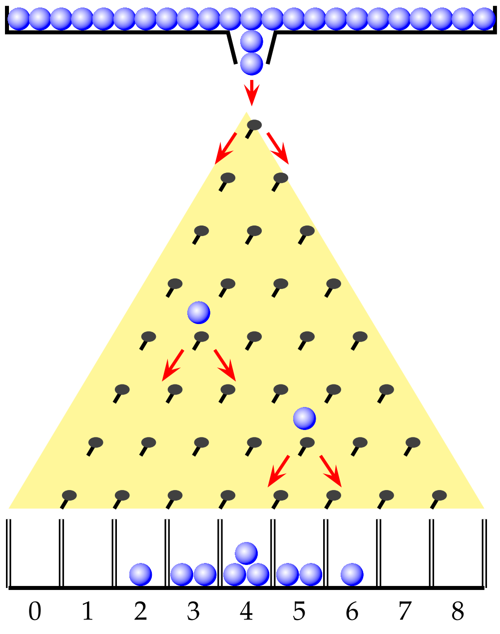
On peut vérifier cette répartition concrètement à l'aide de la planche de Galton.

La planche de Galton est constituée de rangées horizontales de clous décalées d'un demi-cran par rapport à la précédente. On lâche les billes au sommet et celles-ci rebondissent de clou en clou jusqu'à la base de la planche où elles sont collectées dans des réservoirs.

Si le diamètre des billes et l'écartement entre les clous sont correctement choisis, une bille a exactement autant de chance de rebondir à droite ou à gauche du clou. Ci-contre, une planche de Galton avec 8 rangées de clous correspondant à notre expérience de 8 lancés de pièce. La variable aléatoire X associe à chaque boule le nombre de déviations à droite à l'issue des 8 rangées de clous.

Pour réaliser cette expérience : cliquer ici

Prendre par exemple 1000 boules et 8 rangées de clous.



X : Nbre de déviations à droite

Remarque : Cette distribution est symétrique car la probabilité de succès est égale à la probabilité d'échec. On constate que la loi binomiale converge vers la loi normale (courbe en cloche) comme on le verra au chapitre suivant.

3.4.2 Autre représentation : asymétrique

Une urne contient 10 boules (indiscernables au toucher) : 4 boules sont rouges et les autres sont noires. On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant la boule à chaque tirage.

Déterminer et représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de boules rouges obtenues.

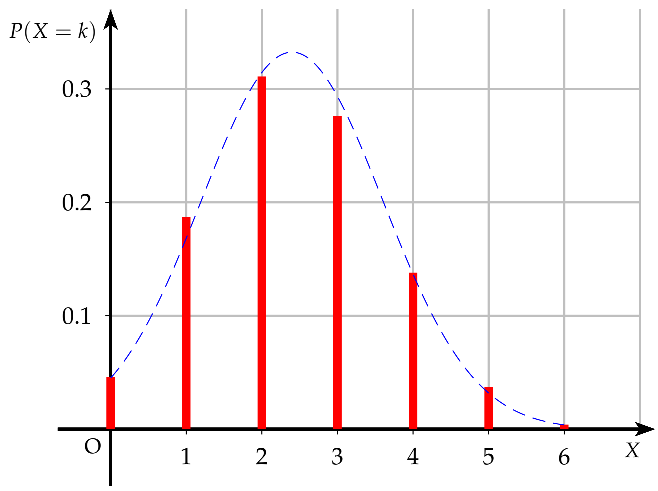
Les 6 lancés sont indépendants car la boule est remise dans l'urne à chaque fois. La probabilité sur un tirage d'obtenir une boule rouge est de 0,4 (les boules sont indiscernables au toucher). On obtient alors :

$$P(X = k) = \binom{6}{k} 0,4^k 0,6^{6-k}$$

On obtient les différentes valeurs avec la calculatrice avec la fonction :
binomFdp(6,0.4)
On obtient alors le tableau de la loi de probabilité (à 10^{-3}) suivant :

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	0,046	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

On obtient la représentation de la loi binomiale $\mathscr{B}(6; 0,4)$ suivante :



3.5 Espérance et variance

Théorème 6 : X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, alors l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$, la variance $\mathrm{V}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ sont égales à :

- $\mathrm{E}(X) = np$
- $\mathrm{V}(X) = np(1 - p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

Remarque : Ce théorème est admis.

Exemple : Une urne contient 10 boules (indiscernables au toucher) : 4 boules sont rouges et les autres sont noires. On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant la boule à chaque tirage. Quelle est le nombre moyen de boules rouges peut-on espérer ? Avec quelle variance et quel écart type.

$$\mathrm{E}(X) = 6 \times 0,4 = 2,4; \quad \mathrm{V}(X) = 6 \times 0,4 \times 0.6 = 1,44; \quad \sigma(X) = \sqrt{1,44} = 1,2$$