Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 28 mars 2018

EXERCICE 1

Primitive et intégrale **(5 points)**

1) a) $f(x) = 3x-1-\dfrac{4}{(x+2)^2} = 3x-1-4\times\dfrac{1}{(x+2)^2} = 3x-1-4\times\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x) = x+2$

$\displaystyle\int \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u}$, on a alors $F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x + \dfrac{4}{x+2}$

b) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2+1} = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2+1$,

$\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$ comme $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, on a alors $G(x) = \dfrac{3}{2}\ln(x^2+1)$

c) $h(x) = (x-1)(x^2-2x-5)^2 = \dfrac{1}{2}(2x-2)(x^2-2x-5) = \dfrac{1}{2}\times u'(x)u^2(x)$

avec $u(x) = x^2-2x-5$, $\displaystyle\int u'u^2 = \frac{1}{3}u^3$, on a alors, $H(x) = \dfrac{1}{6}(x^2-2x-5)^3$

2) a) $F(x) = 5(x + 2e^{-\frac{1}{2}x})$

b) $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^2 5(1-e^{-\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x = 5\left[x+2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2 = 5(2+2e^{-1}-0-2) = 10\,e^{-1} = \frac{10}{e}$

EXERCICE 2

Intégrale **(3 points)**

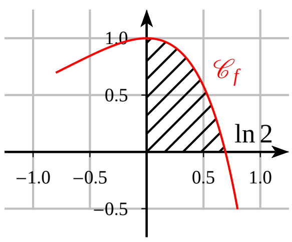
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^x - e^{2x}$

1) $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2e^x - e^{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 2e^x \geqslant e^{2x} \Leftrightarrow e^{\ln 2 + x} \geqslant e^{2x} \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} x + \ln 2 \geqslant 2x$

$\Leftrightarrow -x \geqslant -\ln 2 \Leftrightarrow x \leqslant \ln 2 \Leftrightarrow S =]-\infty\,;\,\ln 2]$.

2) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = 2\times 2 - \frac{1}{2}\times 4 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Comme sur $[0\,;\,\ln 2]$, la fonction f est positive, cette intégrale représente l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite verticale $x = \ln 2$



EXERCICE 3

ROC **(2 points)**

1) Deux événements A et B sont indépendant si, et seulement si, $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$.

2) $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$ probabilité totale.

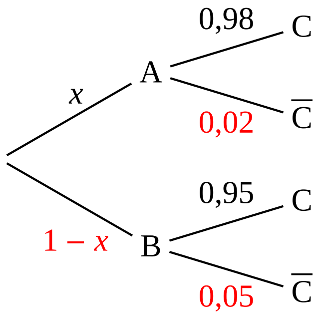
   A et B sont indépendants $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) \Leftrightarrow$
   $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})\,[1 - p(\mathrm{A})] = p(\mathrm{B})p(\overline{\mathrm{A}})$.

   Les événements $\overline{\mathrm{A}}$ et B sont indépendants.

EXERCICE 4

Tablettes de chocolat **(5 points)**

1) $p(\mathrm{A}) = x$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}) = 0,08$ et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{C}) = 0,95$. On obtient l'arbre suivant :



$$p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{C} \cap \mathrm{A}) + p(\mathrm{C} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A})p_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}) + p(\mathrm{B})p_{\mathrm{B}}(\mathrm{C})$$
$$= 0,98x + 0,95(1 - x) = 0,98x + 0,95 - 0,95x = 0,03x + 0,95$$

2) $p(\mathrm{C}) = 0,96 \Leftrightarrow 0,03x + 0,95 \Leftrightarrow 0,03x = 0,01 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

   On a : $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{3}$ et $p(\mathrm{B}) = \dfrac{2}{3}$. On obtient bien la proportion annoncée.

3) a) On prélève 10 tablettes de chocolat de façon identique et indépendantes (tirage avec remise).
   À chaque tirage, on a deux éventualités, soit la tablette est commercialisable avec une probabilité de $p = 0,96$, soit elle ne l'est pas avec une probabilité de $q = 0,04$.
   X la variable aléatoire associée aux nombre de tablettes commercialisables.

   La variable X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\ 0,96)$.

   b) $p(X = 10) = \dbinom{10}{10} \times 0,96^{10} \times 0,04^{0} = 0,96^{10} \approx 0,665$

   c) « au moins 2 tablettes non commercialisables » est équivalent à « au plus 8 tablettes commercialisables ».

   $p(X \leqslant 8) = \mathrm{binomFrép}(10, 0.96, 8) \approx 0,058$

EXERCICE 5

Stylos **(5 points)**

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

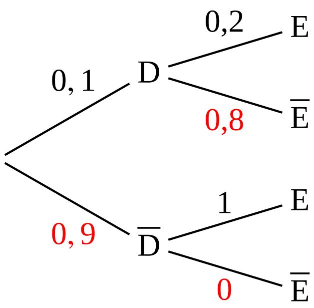
1) a) X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8\ ;\ 0,1)$.

b) $p(\mathrm{A}) = p(X=0) = \dbinom{8}{0} \times 0,1^0 \times 0,9^8 = 0,9^8 \approx 0,430$

$p(\mathrm{B}) = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,9^8 \approx 0,570.$

$p(\mathrm{C}) = p(X=2) = \dbinom{8}{2} \times 0,1^2 \times 0,9^6 \approx 0,149.$

2) a) $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{E}) = 0,2$ et $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{E}) = 1$. On obtient l'arbre suivant :



b) $p(\mathrm{E}) = p(\mathrm{E} \cap \mathrm{D}) + p(\mathrm{E} \cap \overline{\mathrm{D}}) = p(\mathrm{D})p_{\mathrm{D}}(\mathrm{E}) + p(\overline{\mathrm{D}})p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{E}) = 0,1 \times 0,2 + 0,9 \times 1 = 0,92$

c) $p_{\mathrm{E}}(\mathrm{D}) = \dfrac{p(\mathrm{D} \cap \mathrm{E})}{p(\mathrm{E})} = \dfrac{0,02}{0,92} \approx 0,022$

3) Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8\ ;\ 0,022)$

a) $p(Y=0) = \dbinom{8}{0} \times 0,022^0 \times 0,978^8 = 0,978^8 \approx 0,837.$

b) La probabilité du zéro défaut a été nettement amélioré passant de 0,430 à 0,837 soit presque le double.