Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 31 mars 2016

Exercice 1

Primitive et intégrale **(5 points)**

1) a) f est de la forme : $ax+b+\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, donc une primitive est $\dfrac{1}{2}ax^2+bx+\ln|u(x)|$

Une primitive de f sur I est donc : $F(x)=2x^2+3x+\ln(2x-1)$

b) $g(x)=-\dfrac{1}{2}(-2x)\,e^{-x^2+2}=-\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$.

Une primitive de g sur I est donc : $G(x)=-\dfrac{1}{2}e^{u(x)}=-\dfrac{1}{2}e^{-x^2+2}$

c) $h(x)=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{(3x+6)}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Une primitive de h sur I est donc : $H(x)=\dfrac{4}{3}\ln|u(x)|=\dfrac{4}{3}\ln(3x+6)$

2) a) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc : $F(x)=\dfrac{3}{2}\ln|u(x)|=\dfrac{3}{2}\ln(x^2+1)$

b) $=\displaystyle\int_0^2\frac{3x}{x^2+1}\,dx=\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^2=F(2)-F(0)=\frac{3}{2}\ln 5-\frac{3}{2}\ln 1=\frac{3}{2}\ln 5$

Exercice 2

Suite et intégrale **(5 points)**

1) a) Sur [0; 1], la fonction f est continue et positive, donc I_n représente l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite verticale d'équation $x=1$

b) Au vue des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, on observe que $I_3<I_2<I_1$, donc on peut conjecturer que la suite (I_n) est décroissante. De plus l'aire I_n semble se rapprocher de 0, donc la suite (I_n) semble converger vers 0.

2) a) Sur [0; 1], on a : $f_{n+1}(x)=x^2\,e^{-2(n+1)x}=x^2\,e^{-2nx-2x}=x^2\,e^{-2nx}\times e^{-2x}=e^{-2x}\,f_n(x)$

b) Sur [0; 1], comme la fonction exponentielle est croissante et f_n positive, on a :

$$x\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2x\leqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad e^{-2x}\leqslant e^0\quad\Leftrightarrow\quad e^{-2x}f_n(x)\leqslant f_n(x)\quad\Leftrightarrow\quad f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$$

c) D'après la propriété de l'intégration sur les inégalités, on a sur [0 ;1], pour tout entier n :

$$f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)\quad\Rightarrow\quad\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx\leqslant\int_0^1 f_n(x)\,dx\quad\Leftrightarrow\quad I_{n+1}\leqslant I_n$$

La suite (I_n) est donc décroissante.

3) a) Pour tout naturel n, on a sur $[0\,;1]$, comme la fonction carrée est croissante et la fonction exponentielle positive :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x^2\, e^{-2nx} \leqslant e^{-2nx} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}$$

b) En intégrant cet encadrement, on obtient :

$$0 \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{-2nx}\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{-e^{-2nx}}{2n}\right]_0^1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{-e^{-2n}}{2n} + \frac{1}{2n}$$

Remarque : Une primitive de e^{-2nx} est $-\dfrac{e^{-2nx}}{2n}$

On passe à la limite :

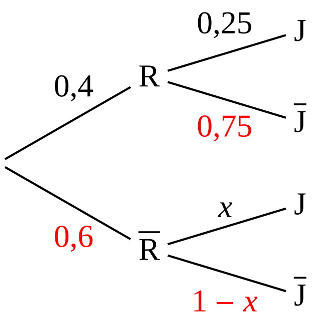
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} -e^{-2n} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{e^{-2n}}{2n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-e^{-2n}}{2n} + \dfrac{1}{2n} = 0 \end{array}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 3

Jus de fruit **(5 points)**

1) On a : $P(\mathrm{R}) = 0,4$, $P_{\mathrm{R}}(\mathrm{J}) = 0,25$ et $P_{\overline{\mathrm{R}}}(\mathrm{J}) = x$.



2) On sait que : $P(\mathrm{J}) = 0,2$, et comme :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{J}) &= P(\mathrm{R}\cap\mathrm{J}) + P(\overline{\mathrm{R}}\cap\mathrm{J}) = P(\mathrm{R})P_{\mathrm{R}}(\mathrm{J}) + P(\overline{\mathrm{R}})P_{\overline{\mathrm{R}}}(\mathrm{J}) \\ &= 0,4 \times 0,25 + 0,6x = 0,1 + 0,6x \end{aligned}$$

On a donc : $0,1 + 0,6x = 0,2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{0,1}{0,6} = \dfrac{1}{6}$

3) $P_{\mathrm{J}}(\mathrm{R}) = \dfrac{P(\mathrm{R}\cap\mathrm{J})}{P(\mathrm{J})} = \dfrac{0,1}{0,2} = 0,5$

Partie B

1) On fait l'expérience, on tire une bouteille dans le stock. Si c'est une bouteille de « pur jus », il y a succès avec une probabilité $p = 0,2$, sinon, il y a échec avec une probabilité $q = 0,8$.

On réitère 500 fois cette expérience de façon identique (assimilable à un tirage avec remise) et indépendante.

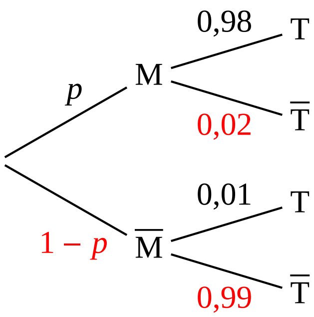
X, représentant le nombre de succès, suit alors une loi binomiale $\mathscr{B}(500\ ;\ 0,2)$

2) $P(X \geqslant 80) = 1 - P(X \leqslant 79) = 1 - \text{binomFRép}(500, 0.2, 79) \approx 0,990$

EXERCICE 4

Le chikungunya **(5 points)**

1) a) On a : $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0,98$ et $P_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = 0,01$



b) $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) = P(\mathrm{M})P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0,98p$

$P(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T}) = P(\overline{\mathrm{M}})P_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = 0,01(1-p) = 0,01 - 0,01p$

$P(\mathrm{T}) = P(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) + P(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T}) = 0,98p + 0,01 - 0,01p = 0,97p + 0,01$

2) a) $f(p) = P_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{P(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})}{P(\mathrm{T})} = \dfrac{0,98p}{0,97p + 0,01} = \dfrac{98p}{97p+1}$

b) On s'intéresse aux variation de f sur [0 ;1]. Calculons la dérivée :

$$f'(p) = \frac{98(97p+1) - 97 \times 98p}{(97p+1)^2} = \frac{98 \times 97p + 98 - 97 \times 98p}{(97p+1)^2} = \frac{98}{(97p+1)^2} > 0$$

$\forall p \in [0; 1]$, $f'(p) > 0$. La fonction f est croissante sur [0 ;1].

On a alors : $f(p) \in [f(0)\,;\, f(1)] = [0\,;\, 1]$

3) Résolvons : $f(p) = 0,95 \Leftrightarrow \dfrac{98p}{97p+1} = 0,95 \Leftrightarrow 98p = 92,15p + 0,95 \Leftrightarrow$

$5,85p = 0,95 \Leftrightarrow p = \dfrac{0,95}{5,85} \approx 0,1624$

On veut que $P_T(M) > 095 \Leftrightarrow f(p) > 0,95$. Comme la fonction f est croissante, $p > 0,1624$.

On doit donc avoir au moins 16,24 % de malades pour que le test soit fiable.