Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 26 mars 2015

Exercice 1

Primitives et intégrales **(5 points)**

1) On a :

a) $f(x) = \dfrac{2}{3x+1}$ forme $\dfrac{u'}{u} \to \ln|u|$, on a : $f(x) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{3x+1} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{u'}{u}$

$F(x) = \dfrac{2}{3}\ln|u| = \dfrac{2}{3}\ln|3x+1| = \dfrac{2}{3}\ln(3x+1)$ sur I

b) $g(x) = e^{1-2x}$ forme $u'e^u \to e^u$, $g(x) = -\dfrac{1}{2} \times (-2)\, e^{1-2x} = -\dfrac{1}{2} \times u'\, e^u$

$G(x) = -\dfrac{1}{2}\, e^u = -\dfrac{1}{2}\, e^{1-2x}$ sur I

c) $h(x) = \dfrac{-5}{(2x-1)^2}$ forme $\dfrac{u'}{u^n} \to \dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$, $h(x) = -\dfrac{5}{2} \times \dfrac{2}{(2x+1)^2} = -\dfrac{5}{2} \times \dfrac{u'}{u^2}$

$H(x) = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{u} = \dfrac{5}{2(2x-1)}$ sur I

2) On dérive la fonction F :

$$F'(x) = \frac{-\dfrac{1}{x} \times x - (-2 - \ln x)}{x^2} = \frac{-1 + 2 + \ln x}{x^2} = \frac{1 + \ln x}{x^2} = f(x)$$

Comme $F' = f$, F est une primitive de f.

3) On détermine une primitive de $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{2}(-2x)\, e^{-x^2}$ donc :

$F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{3}{2}\, e^{-x^2}$ on a alors :

$$I = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \left(x + 1 - 3x\, e^{-x^2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}\, e^{-x^2}\right]_{-\frac{3}{2}}^{0}$$

$$= \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\, e^{-\frac{9}{4}}\right) = \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\, e^{-\frac{9}{4}} = \frac{15}{8} - \frac{3}{2}\, e^{-\frac{9}{4}} \simeq 1,72$$

Exercice 2

Intégrale et suite **(2 points)**

1) $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 (1 + 2t^{n+1})\, \mathrm{d}t - \int_0^1 (1 + 2t^n)\, \mathrm{d}t$

De la linéarité de l'intégrale, on a alors :

$I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 (1 + 2t^{n+1} - 1 - 2t^n)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 2t^n(t-1)\, \mathrm{d}t$

or $t \in [0\,;\,1]$ donc $2t^n \geqslant 0$ et $t - 1 \leqslant 0$

D'après la positivité de l'intégrale $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$. La suite (I_n) est donc décroissante.

2) $0 \leqslant t \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant t^n \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant 2t^n \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant 1 + 2t^n \leqslant 3$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a : $1(1-0) \leqslant I_n \leqslant 3(1-0) \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant I_n \leqslant 3.$

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème des suites monotones, la suite (I_n) converge vers ℓ telle que $1 \leqslant \ell \leqslant 3$

Exercice 3

ROC **(2 points)**

A et $\overline{\text{A}}$ forment une partition de l'univers Ω, donc : $P(\text{B}) = P(\text{A} \cap \text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B})$

A et B sont indépendants donc : $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$.

On a donc :

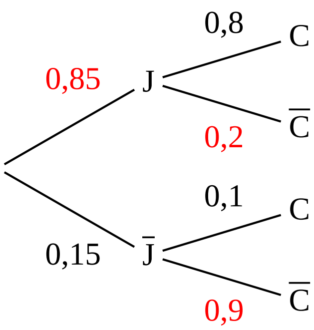
$$P(\text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) \quad \Leftrightarrow \quad P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = P(\text{B})(1 - P(\text{A})) = P(\text{B}) \times P(\overline{\text{A}})$$

$\overline{\text{A}}$ et B sont indépendants.

Exercice 4

Huîtres **(7 points)**

1) a) D'après l'énoncé, on a : $P(\bar{\text{J}}) = 0,15$, $P_{\bar{\text{J}}}(\text{C}) = 0,1$ et $P_{\text{J}}(\text{C}) = 0,8$



b) $P(\bar{\text{J}} \cap \text{C}) = P(\bar{\text{J}}) \times P_{\bar{\text{J}}}(\text{C}) = 0.15 \times 0,1 = 0,015$

c) $P(\text{C}) = P(\text{J} \cap \text{C}) + P(\bar{\text{J}} \cap \text{C}) = 0,85 \times 0,8 + 0,015 = 0,68 + 0,015 = 0,695$

d) $P_{\text{C}}(\bar{\text{J}}) = \dfrac{P(\bar{\text{J}} \cap \text{C})}{P(\text{C})} = \dfrac{0,015}{0,695} = 0,022$

2) a) Sur un tirage, on a deux issues :
- un succès de probabilité $p = P(\text{C}) = 0,695$
- un échec de probabilité $q = 1 - p = 0,305$

On effectue ensuite 15 tirages identiques et indépendants (les tirages sont assimilés à des tirages avec remises).
Donc X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(15\,;\,0,695)$

b) $P(X = 6) = \dbinom{15}{6} \times 0,695^6 \times 0,305^9 = \text{binomFdp}(15\ ,\ 0.695\ ,\ 6) = 0,013$

c) $P(X \geqslant 9) = 1 - P(X \leqslant 8) = 1 - \text{binomFRép}(15\ ,\ 0.695\ ,\ 8) = 0,859$

EXERCICE 5

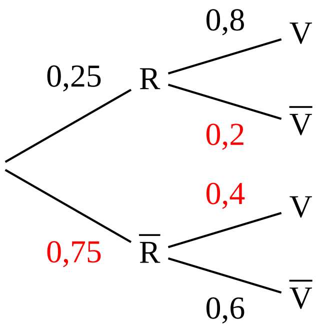
Vrai-Faux **(2 points)**

Proposition : Vraie.

On peut poser :
- R : "*Jour où il pleut*"
- V : "*Zoé prend sa voiture*"

D'après l'énoncé, on a : $P(\mathrm{R}) = 0,25$, $P_{\mathrm{R}}(\mathrm{V}) = 0,8$ et $P_{\overline{\mathrm{R}}}(\overline{\mathrm{V}}) = 0,6$

On peut construire l'arbre suivant :



$P(\mathrm{V}) = P(\mathrm{R} \cap \mathrm{V}) + P(\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{V}) = 0,25 \times 0,8 + 0,75 \times 0,4 = 0,2 + 0,3 = 0,5$

Zoé se rend bien un jour sur 2 à son travail en voiture.

EXERCICE 6

Ordinateurs **(2 points)**

1) On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre d'acheteurs d'ordinateur parmi les personnes intéressées de l'échantillon.
   X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0,3)$

   Le nombre moyen de personnes qui ont acheté un ordinateur correspond à l'espérance mathématique de X
   $E(X) = np = 10 \times 0,3 = 3$

   En moyenne, il y a trois acheteurs dans l'échantillon.

2) $P(3 \leqslant X \leqslant 6) = P(X \leqslant 6) - P(X \leqslant 2) = \text{binomFRép}(10\ ,\ 0.3\ ,\ 6) - \text{binomFRép}(10\ ,\ 0.3\ ,\ 2)$
   $= 0,607$

   Il y a à peu plus de 60 % de chance que dans l'échantillon entre 3 et 6 personnes aient acheté un ordinateur !