Contrôle de mathématiques

Du jeudi 25 avril 2013

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

1) X, une variable aléatoire, suit la loi normale centrée réduite. On appelle Φ la fonction de répartion. On a alors : $\Phi(x) = P(\mathrm{X} \leqslant x)$. On donne les résultats suivants pour tous réels a et b tels que a<b :

   - $P(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
   - $P(\mathrm{X} \leqslant -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$

   Soit α un réel de l'intervalle]0 ;1[. Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif u_α tel que : $P(-u_\alpha \leqslant \mathrm{X} \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$

2) **Application :** Une embouteilleuse remplit des bouteilles de 100 cl de jus de pommes. On note T l'écart $q - 100$ en cl, où q désigne la quantité de jus de pomme dans la bouteille.

   a) Déterminer au centième près, le nombre $u > 0$ tel que : $P(-u \leqslant \mathrm{T} \leqslant u) = 0,9$.

   b) En déduire un encadrement, centré sur 100 cl, de la quantité de jus de pomme dans 90 % des bouteilles.

EXERCICE 2

Pannes informatiques **(6 points)**

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad P(\mathrm{X} \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1) On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à $0,6$.
   Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est $0,131$.

   Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près .

2) Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à $0,52$.

3) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

4) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.

5) On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
   a) Quelle est la loi suivie par Y ?
   b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures
   c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

Exercice 3

Conception des tests de QI **(3 points)**

Note : on reviendra pour les questions posées dans cette exercice à la loi normale centrée réduite en faisant un changement de variable judicieusement choisi.

Les tests de QI (quotient intellectuel) sont conçu de façon à ce que, pour une population donnée, le QI moyen soit 100 et l'écart-type 15. Les résultats au QI sont distribués suivant une loi normale.

1) Quel est le pourcentage de la population ayant un QI en dessous de 70 ?
2) Quel est le pourcentage de la population ayant un QI entre 100 et 115 ?
3) Une association regroupe les personnes volontaires et dont le QI fait partie des 2 % les plus élevés.
   Quel QI faut-il avoir pour adhérer à cette association ?

Exercice 4

Composants éléctroniques **(4 points)**

Un usine fabrique des composants électroniques. On estime à 0,02 la probabilité qu'un composant pris au hasard dans la production soit défectueux.
En bout de chaîne, on teste 400 composants choisis au hasard avec remise. On appelle X la variable aléatoire associé au nombre de composants défectueux.

1) Quelle loi suit X ? Pourquoi ?
2) À l'aide de cette loi et de votre calculatrice, calculer à 10^{-4} près la probabilité d'avoir au moins 10 composants défectueux dans l'échantillon.
3) On fait l'approximation que X suit une loi normale.
   a) Pourquoi peut-on faire cette approximation ?
   b) Quels sont les paramètres de cette loi normale ?
   c) Avec votre calculatrice, calculer à 10^{-4} près la probabilité d'avoir au moins 10 composants défectueux dans l'échantillon avec cette approximation.
   d) Quelle est alors l'erreur ϵ, en pourcentage, commise à 1 % près ?

Exercice 5

Approximation de $\ln 2$ **(5 points)**

Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on appelle C le carré unité construit à partir de l'origine O et des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et $\mathscr{D}$ le domaine situé entre les abscisses 0 et 1 et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x+1}$.

1) On choisit au hasard un point du carée C.
   Calculer la probabilité qu'il soit dans le domaine $\mathscr{D}$, c'est à dire le rapport de l'aire de $\mathscr{D}$ et l'aire du carré C.
2) On choisit 1 000 points au hasard dans le carré C.
   On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de ces points qui sont dans $\mathscr{D}$. On justifiera la loi utilisée.
   A l'aide de votre calculette, calculer à 10^{-2} près $P(655 < X < 730)$
3) L'algorithme ci-contre permet de réaliser l'expérience du 2).
   a) Donner les parties (1), (2), (3) manquantes
   b) Réaliser puis exécuter 2 fois ce programme en notant les 2 résultats obtenus. (penser à régler la fenêtre)
   c) Le résultat du 2) est-il confirmé ?
   d) Á l'aide des deux résultats trouvés, donner une valeur plausible de $\ln 2$.

Variables
N, I, X, Y
Initialisation
Effacer le dessin
$0 \to N$
Traitement
Pour I de 1 à $\boxed{\;?\;}$ (1)
    random $\to X$
    random $\to Y$
    Si $\boxed{\;?\;}$ (2) alors
        $N + 1 \to N$
        Tracer le point (X, Y)
    FinSi
FinPour
Sortie
Afficher $\boxed{\;?\;}$ (3)

Voici ce que l'on peut visualiser sur la calculatrice TI 82 stat