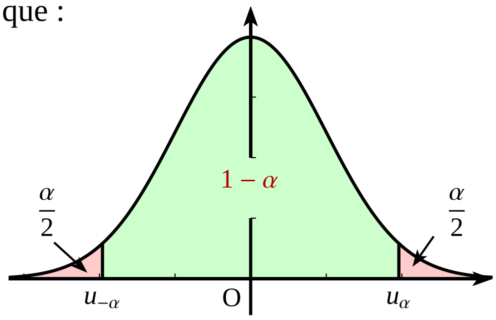
Correction contrôle de mathématiques
Du jeudi 25 avril 2013

Exercice 1

ROC **(3 points)**

1) On cherche un réel x strictement positif tel que :

$$\begin{aligned} P(-x \leqslant X \leqslant x) &= 1-\alpha \\ \Phi(x) - \Phi(-x) &= 1-\alpha \\ \Phi(x) - 1 + \Phi(x) &= 1-\alpha \\ 2\Phi(x) - 1 &= 1-\alpha \\ \Phi(x) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$



On sait que la fonction Φ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus :

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}\ , \quad \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad 0 < \alpha < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2} < 1$$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x = u_\alpha$ strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

2) **Application :**

a) On a donc : $1-\alpha = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0,1$

On doit donc avoir : $\Phi(u) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad u = \Phi^{-1}(0,95)$.

A l'aide de la calculatrice avec la fonction "**FracNorm(0,9)**" ou à l'aide d'une table, on trouve : $u \simeq 1,64$

b) On a : $-1,64 \leqslant q - 100 \leqslant 1.64$ donc $q \in [98,36; 101,64]$

Exercice 2

Pannes informatiques **(6 points)**

1) On a : $P(X < 7) = 0,6 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-7\lambda} = 0.6 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-7\lambda} = 0,4$

Comme la fonction ln est monotone, on a alors :

$$-7\lambda = \ln 0,4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{\ln 0,4}{7} \simeq 0,1308 \simeq 0,131$$

2) On a : $P(X > 5) = e^{-5\lambda} = e^{-0,655} \simeq 0,519 \simeq 0,52$

3) Comme la loi exponentielle est sans mémoire, on a :

$$P_{X\geqslant 4}(X > 9) = P(X > 5) \simeq 0,52$$

4) On a : $P(6 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 6) = e^{-6\lambda} - e^{-10\lambda} = e^{-0,786} - e^{-1,31} \simeq 0,19$

5) a) Les 8 relevés sont indépendants et à chaque relevé, il y a que deux eventualités, soit le temps est supérieur à 5 heures ($p = 0,52$), soit il est inférieur ou égal à 5 heures ($1 - p = 0,48$). Y suit donc une loi binomiales $\mathscr{B}(8; 0,52)$

b) $P(\mathrm{Y} = 3) = \binom{8}{3} \times 0,52^3 \times 0,48^5 \simeq 0,20$

c) $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = np = 8 \times 0,52 \simeq 4,12$
L'espérance est donc de 4 relevés supérieurs à 5 heures.

Exercice 3

Conception des tests de QI **(3 points)**

1) On pose les variables aléatoires, X associé à la valeur du QI et $\mathrm{Z} = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$
X suit la loi normale $\mathscr{N}(100; 15)$ et Y la loi normale $\mathscr{N}(0; 1)$

$$P(\mathrm{X} < 70) = P\left(\mathrm{Z} < \frac{70 - 100}{15}\right) = P(\mathrm{Z} < -2) = 1 - \Phi(2) \simeq 1 - 0,9772 \simeq 0,0228$$

2,28 % de la population a un QI inférieur à 70

2) On a :

$$P(100 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 115) = P\left(0 \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \frac{115 - 100}{15}\right) = P(0 \leqslant \mathrm{Z} \leqslant 1) = \Phi(1) - \Phi(0)$$
$$\simeq 0,8413 - 0,5 \simeq 0,3413$$

34,13 % de la population a un QI compris entre 100 et 115.

3) On cherche x tel que : $P(\mathrm{X} > x) = 0,02$ donc que $P(\mathrm{X} \leqslant 2) = 0,98$. On a alors :

$$P\left(\mathrm{Z} \leqslant \frac{x - 100}{15}\right) = 0,98 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 100}{15} = \Phi^{-1}(0,98) \simeq 2,05$$

Donc : $x \simeq 15 \times 2,05 + 100 \simeq 130,75$

Il faut donc avoir un QI supérieur à 130 pour faire partie de cette association

Exercice 4

Composants éléctroniques **(4 points)**

1) On fait 400 expériences identiques et indépendantes (avec remise) et sur chaque expérience, il y a que 2 issues : soit le composant est défectueux ($p = 0,02$), soit il ne l'est pas ($1 - p = 0,98$).
X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(400; 0,02)$

2) $P(\mathrm{X} \geqslant 10) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 9) \simeq 1 - 0,7179 \simeq 0,2821$

3) a) Les conditions d'approximation sont vérifiées :

$$n = 400 \geqslant 30, \quad np = 400 \times 0,02 = 8 \geqslant 5, \quad n(1 - p) = 400 \times 0.98 = 392 \geqslant 5$$

b) Les paramètres de $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ sont :

$$\mu = np = 8 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{7,84} = 2,8$$

c) $P(X \geqslant 10) = P_N(X \geqslant 9,5) =$ NormalFRép(9.5,1E99, 8, 2.8) $\simeq 0,2961$

d) $\epsilon \simeq \dfrac{0,2961 - 0,2821}{0,2821} \times 100 \simeq 5\ \%$

EXERCICE 5

Approximation de $\ln 2$ **(5 points)**

1) Soit A le point choisi. On a :

$$\text{aire de } \mathscr{D} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2$$

Comme l'aire de carré C est 1 alors : $P(A \in \mathscr{D}) = \dfrac{\text{aire de } \mathscr{D}}{\text{aire de C}} = \ln 2$

2) Comme les points sont choisis au hasard donc de manière indépendantes, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(1000, \ln 2)$

Comme $n = 1000$ est assez grand, on peut approximer cette loi binomiale par la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, avec :

$$\mu = 1000 \ln 2 \simeq 693,15 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{1000 \ln 2(1 - \ln 2)} \simeq 14,58$$

On trouve alors : $P(655 < X < 730) \simeq 0,990$. on a 99 % de chances d'avoir dans $\mathscr{D}$ entre 655 et 730 points.

3) a) On a

- (1) Pour I de 1 à 1000
- (2) Si $Y \leqslant \dfrac{1}{X+1}$
- (3) Afficher N

b) J'ai trouvé : $N_1 = 697$ et $N_2 = 683$

c) Les deux résultats trouvé sont bien dans l'intervalle [655 ;730]

d) Pour trouver une approximation de $\ln 2$, il faut diviser N par 1000.

Donc $0,655 \leqslant \ln 2 < 0,730$ à 99 %.
Avec les valeurs trouvé on a : $\ln 2 \simeq 0,697$ et $\ln 2 \simeq 0,683$