# Limites indéterminées avec des radicaux

## 1 Une simple indétermination

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

Déterminer la limite de la fonction $f$ en $-\infty$

Le premier terme $\sqrt{x^2+1}$ tend vers $+\infty$ tandis que le deuxième $x$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ $(+\infty - \infty)$

Pour lever l'indétermination, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

Il suffit alors de déterminer la limite de ce dénominateur pour trouver la limite de la fonction $f$ en $-\infty$

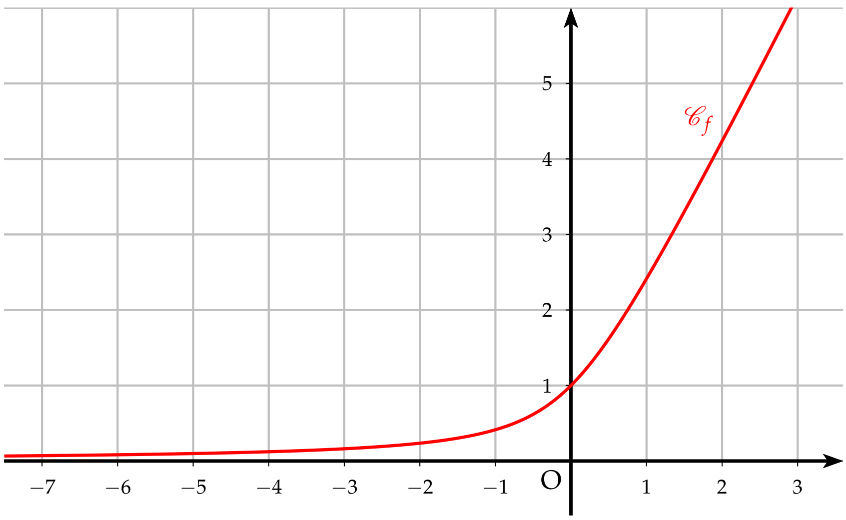
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \end{array}$$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$

Par quotient, on a alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

**Remarque :** La courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$.

On peut visualiser la limite de la fonction $f$ en $-\infty$, par la courbe $\mathscr{C}_f$



## 2 Une double indétermination

Soit la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty;[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$

Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$

Le premier terme $\sqrt{x^2+2x}$ tend vers $+\infty$ tandis que le deuxième $-x$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ $(+\infty - \infty)$

- Pour lever la première indétermination, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

  **Remarque :** On observe une deuxième indétermination car le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux l'infini. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

- Pour lever cette deuxième indétermination, il faut mettre en facteur le terme prépondérant du dénominateur.

  **Remarque :** On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$

$$\sqrt{x^2+2x}+x = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x$$

  or comme $x > 0$, on a : $|x| = x$, d'où :

$$f(x) = \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x} = \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

  Il suffit de déterminer la limite de ce dénominateur pour trouver la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to1} \sqrt{x} = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par composition} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{2}{x}} = 1\end{array}$$

  Par somme et quotient, on a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{2}{2} = 1$

**Remarque :** La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$