Devoir à rendre pour le 02 novembre 2015

EXERCICE I

Suite et limite **(5,5 points)**

Soit la suite (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5$

1) a) Calculer les termes u_1, u_2, u_3, u_4.

b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est décroissante ?

2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 3, \quad u_{n+1} > u_n$

Que peut-on en déduire ?

Quelle remarque peut-on faire par rapport à la réponse de la question 2) b) ?

3) On pose $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5.

b) En déduire l'expression de (v_n) puis de (u_n) en fonction de n.

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

EXERCICE II

Algorithme **(2,5 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}u_n + 1$

1) Écrire un algorithme permettant de calculer u_n, n étant donné.

2) Rentrer cet algorithme dans votre calculette puis recopier et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs à 10^{-3} :

n	2	3	10	50	100	500
u_n	1,500	2,125				

3) Que peut-on faire comme conjecture quant à la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE III

Dérivée **(5 points)**

1) Déterminer les dérivées des fonctions suivantes en détaillant vos calculs :

a) $f(x) = -x^3 + \dfrac{5x^2}{4} - 2x + 8, \quad x \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = \dfrac{x-4}{x^2+5}, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $h(x) = \dfrac{2}{(2-x)^5}, \quad x \in \mathbb{R} - \{2\}$

2) Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$ par : $f(x) = 3x\sqrt{-2x+5}$

   a) Sur quelle intervalle la fonction f est-elle dérivable ?

   b) Montrer que la fonction dérivée peut se mettre sous la forme : $f(x) = \dfrac{-3(3x-5)}{\sqrt{-2x+5}}$

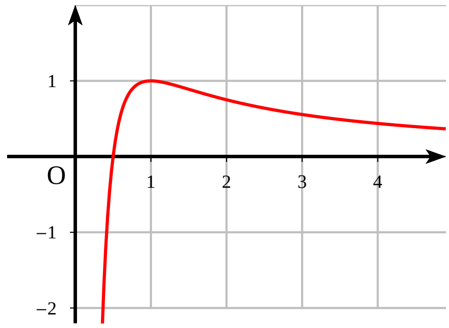
   c) En déduire les variation de la fonction f.

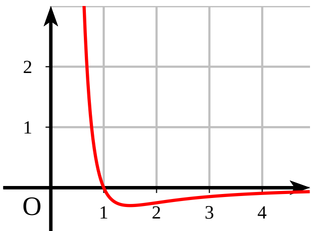
Exercice IV

Reconnaître une courbe **(2 points)**

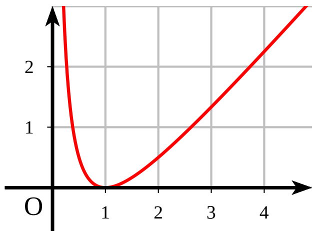
La figure ci-contre est la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$

Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f. On se justifiera

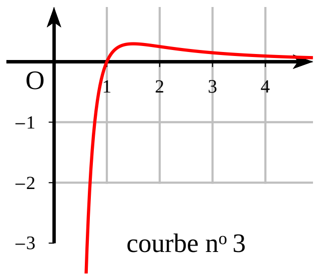




courbe n° 1



courbe n° 2



courbe n° 3

Exercice V

Étude d'une fonction **(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

1) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en conclure pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f. On cherchera à factoriser f'.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Déterminer une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ en 0.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, T_0 ainsi que les asymptotes éventuelles. On marquera les extremum de la fonction f. Unités : 1 cm sur les abscisses et 2 cm sur les ordonnées.