Correction devoir du lundi 06 novembre 2017

Exercice I

Fonction polynôme **(5 points)**

1) $f(x) \overset{x\neq 0}{=} x^4\left(2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$ donc $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2} = 2\end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

2) $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 4x = 4x(2x^2 - 3x + 1)$.

3) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } 2x^2 - 3x + 1 = 0$

Racine de $2x^2 - 3x + 1$, $x_1 = 1$ racine évidente $P = \dfrac{1}{2}$ donc $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Pour déterminer le signe de la dérivée, on remplit un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x^2-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On pourrait montrer que la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

5) D'après le tableau de variation, en admettant la continuité, l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions. En effet la fonction f :

- sur $]-\infty\,;\,0]$ passe par 1 une seule fois car monotone et varie de 0 à $+\infty$;
- sur $[0\,;\,1]$ ne passe pas par 1 car varie de 0 à $\dfrac{1}{8}$;
- sur $[1\,;+\infty[$ passe par 1 une seule fois car monotone et varie de 0 à $+\infty$.

EXERCICE II

Fonction classique **(5 points)**

1) a) Limites en 2 : $\lim\limits_{x\to 2} 4x+3 = 11$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

d'où $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+ \text{ par quotient } \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{9}{x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} x-2 = 0^- \text{ par quotient } \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{9}{x-2} = -\infty \end{cases}$

Par somme $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

b) Limite en $+\infty$ et $-\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 4x+3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9}{x-2} = 0 \end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 4x+3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9}{x-2} = 0 \end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2) $f'(x) = 4 - \dfrac{9}{(x-2)^2} = \dfrac{4(x-2)^2-9}{(x-2)^2} = \dfrac{(2x-4-3)(2x-4+3)}{(x-2)^2} = \dfrac{(2x-7)(2x-1)}{(x-2)^2}$

3) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{7}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

Le signe de $f'(x)$ est du signe de $(2x-7)(2x-1)$ le dénominateur étant positif.

4) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	23	$\nearrow$	$+\infty$

On pourrait montrer que le point I$(2\,;11)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ et que la droite d'équation $y = 4x+3$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE III

Fonction bornée **(5 points)**

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{-3(-x)}{(-x)^2+1} = +\dfrac{3x}{x^2+1} = -f(x)$

La fonction f est impaire et donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

2) $f(x) \overset{x\neq 0}{=} \dfrac{-3x}{x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{-3}{x+\dfrac{1}{x}}$ comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{1}{x}$ par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Par symétrie par rapport à l'origine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

3) $f'(x) = \dfrac{-3(x^2+1)+3x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-3x^2-3+6x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3x^2-3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \;$ ou $\; x = -1.$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(x+1)$ car le dénominateur est positif.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	0

D'après le tableau de variation la fonction f est bornée par $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right]$.

Exercice IV

Fonction irrationnelle **(5 points)**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty\end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$

par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) f est dérivable si $x+3>0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3$ donc $\mathrm{I} =]-3\,;+\infty[$

3) $f'(x) = \sqrt{x+3} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}.$

4) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$ et le signe de $f'(x)$ sur I est du signe de $(x+2)$.

5) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$

6) L'équation de la tangent en 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ or $f'(1) = \dfrac{9}{4}$ et $f(1) = 2.$

(T) : $y = \dfrac{9}{4}(x-1) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{9}{4}x - \dfrac{1}{4}$

7) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente vertical en $x = -3$ car $\lim\limits_{x\to-3^+} f'(x) = +\infty$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontal en $x = -2$ car $f'(-2) = 0$.

Pour tracer (T) on peut prendre les points $(-1\,;-2,5)$ et $(1\,;2)$.

On obtient la courbe suivante :