Correction du devoir du 12 novembre 2012

Exercice I

Asymptote oblique **7 points**

1) On étudie les limites en l'infini et les limites en -3

a) **Limites en l'infini :** on change la forme de f.

$$x \neq 0 \quad f(x) = \frac{x^2\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{x\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{1 + \frac{3}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = +\infty \end{array}$$

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

de façon analogue, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) **Limites en** -3 **:** on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	

On en déduit alors :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3} x^2 + 5x + 7 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} x + 3 = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} x + 3 = 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient} \\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = -\infty \end{array}$$

On en déduit alors une asymptote verticale d'équation $x = -3$.

2) On dérive comme un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+5)(x+3) - (x^2 + 5x + 7)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 6x + 5x + 15 - x^2 - 5x - 7}{(x+3)^2} \\ &= \frac{x^2 + 6x + 8}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

3) Le signe de $f'(x)$ est le signe de (x^2+6x+8) car $\forall x \in \mathbb{R}-\{-3\},\ (x+3)^2>0$

On calcule les racines du trinôme : $\Delta = 36-32 = 4 = 2^2$

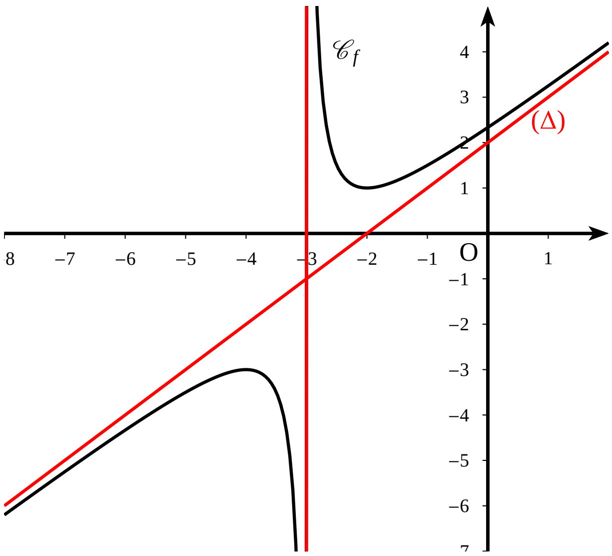
On obtient alors les racines suivantes : $x_1 = \dfrac{-6+2}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-6-2}{2} = -4$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-4		-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	- 3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$$f(-4) = \frac{16-20+7}{-1} = -3 \quad \text{et} \quad f(-2) = \frac{4-10+7}{1} = 1$$

4) a) On a l'allure de $\mathscr{C}_f$ suivante :



Pour les grandes valeurs de x en valeur absolue, on observe que la courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche de plus en plus de la droite (Δ).

b) On a :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)-(x+2) \\ &= \frac{x^2+5x+7}{x+3}-(x+2) \\ &= \frac{x^2+5x+7-(x+2)(x+3)}{x+3} \\ &= \frac{x^2+5x+7-x^2-3x-2x-6}{x+3} \\ &= \frac{1}{x+3} \end{aligned}$$

De $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x+3 = \pm\infty$ par quotient, on a $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$

c) La position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (Δ) est donnée par le signe de $g(x)$, donc de $(x+3)$

- si $x < -3$, $g(x) < 0$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de (Δ)
- si $x > -3$, $g(x) > 0$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de (Δ)

d) On a :

Entrée et initialisation
Lire a (proche de 0)
$1 \to x$
Traitement
Tant que $\dfrac{1}{x+3} > a$
$x + 1 \to x$
FinTantque
Sortie
Afficher x

Pour $a = 10^{-3}$, on trouve alors

$$x = 997$$

Exercice II

Vrai-Faux **4 points**

1) **Faux** La fonction f peut être négative

Soit par exemple $f(x) = -x$, on a bien : $\forall x > 0 \quad -x \leqslant \dfrac{2}{x}$

et pourtant $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$

2) **Vrai**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{2}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{3}{x} = 2 \end{array}\right\}$$

D'après le théorème de gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

3) **Faux** La fonction pourrait osciller entre 1 et 2 sans avoir de limite :

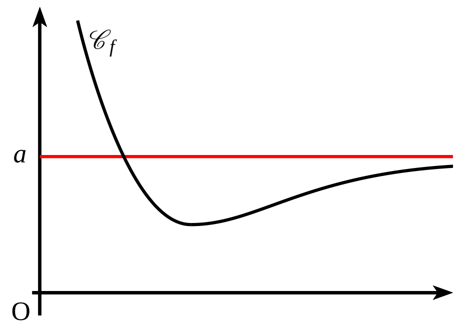
Soit la fonction $f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2}\sin x$, on a pour tout $x > 0$:

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\sin x \leqslant \frac{1}{2}$$
$$1 \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sin x \leqslant 2$$
$$1 + \frac{3}{x} \leqslant \frac{3}{2} + \frac{3}{x} + \frac{1}{2}\sin x \leqslant 2 + \frac{3}{x}$$

et pourtant la fonction f n'a pas de limite !

4) **Faux**

La courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche de plus en plus de la droite $y = a$ mais elle peut la couper. On peut proposer la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre :



EXERCICE III

Dérivée **5 points**

1) $f_1(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{x^2-1-2x(x+2)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2-1-2x^2-4x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

2) $f_2(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x-3)} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x}$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2-3x)-(x-1)^2(2x-3)}{x^2(x-3)^2} \\ &= \frac{(x-1)[2(x^2-3x)-(x-1)(2x-3)]}{x^2(x-3)^2} \\ &= \frac{(x-1)(2x^2-6x-2x^2+3x+2x-3)}{x^2(x-3)^2} \\ &= \frac{(x-1)(-x-3)}{x^2(x-3)^2} \end{aligned}$$

3) $f_3(x) = (3x-1)^2(1-2x)^3$.

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 2\times 3(3x-1)(1-2x)^3 - 3\times 2(3x-1)^2(1-2x)^2 \\ &= 6(3x-1)(1-2x)^2(1-2x-3x+1) \\ &= 6(3x-1)(1-2x)^2(-5x+2) \end{aligned}$$

4) $f_4(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$.

$$f_4'(x) = \frac{\sqrt{x}-(x-1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x-x-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

5) $f_5(x) = \sin x \cos x$.

$$f_5'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

EXERCICE IV

Fonction catastrophe **4 points**

1) On obtient le tableau suivant :

x	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
$f(x)$	200,00	200,09	0	0	0	0	0

On peut au regard de ces résultats faire la conjecture que la limite quand x tend vers 0 de la fonction f vaut 0

2) On a :

$$(x^{20}+100)^2 = x^{40} + 200x^{20} + 10\,000$$

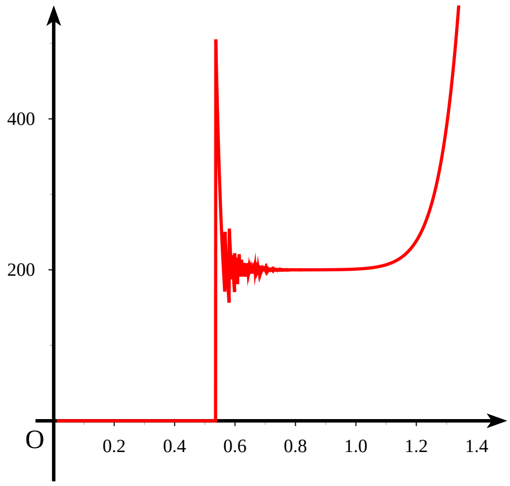
On a alors :

$$f(x) = \frac{x^{40} - 200x^{20} + 10\,000 - 10\,000}{x^{20}} = \frac{x^{20}(x^{20}+200)}{x^{20}} = x^{20} + 200$$

3) On a donc : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^{20} + 200 = 200$

4) La conjecture s'avère fausse. On peut l'expliquer car la calculatrice calcule sur 12 chiffres et comme x^{20} est négligeable devant 100 lorsque x est voisin de 0, elle fait donc l'approximation pour $x \leqslant 0,3$ que $(x^{20}-100)^2 \simeq 100^2$. Le numérateur est alors nul !

On peut donner ce que trace géogébra :



L'idée de discontinuité ou de rupture (à partir de 0,3 la calculatrice décroche) est à l'origine de la théorie des catastrophes en mathématique. On peut observer ce phénomène par exemple :

- lorsque l'on plie une branche d'un arbre (elle se courbe petit à petit puis casse),
- en économie lors d'un krach boursier,
- lorsque l'on s'intéresse aux mouvements de foule ou aux emeutes