Correction contrôle de mathématiques
Du mercredi 07 février 2018

EXERCICE 1

Géométrie **(4 points)**

1) a) $|z-4| = |z+2i| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow$ AM = BM.
δ est la médiatrice sur segment [AB].

b) $C \in \delta \Leftrightarrow$ AC = BC.

$|AC| = |z_C - z_A| = |3i - 4| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$
$|BC| = |z_C - z_B| = |3i + 2i| = |5i| = 5|i| = 5.$

C se situe bien sur la médiatrice du segment [BC].

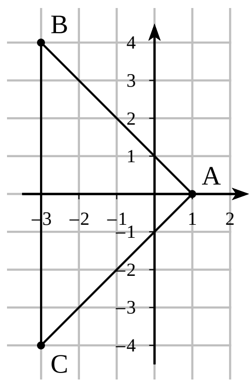
2) a) $(z-1)(z^2+6z+25) = 0 \Leftrightarrow z_1 = 1$ ou $z^2 + 6z + 25 = 0.$

$z^2 + 6z + 25 = 0$, on a $\Delta = 36 - 100 = -64 = (8i)^2$,
$\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées :

$$z_2 = \frac{-6+8i}{2} = -3+4i \quad \text{ou} \quad z_3 = \frac{-6-8i}{2} = -3-4i$$

b) Soit A(z_1), B(z_2), C(z_3), montrons que ABC est un triangle isocèle rectangle en A.

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{-3-4i-1}{-3+4i-1} = \frac{-4-4i}{-4+4i}$$
$$\overset{\div 4}{=} \frac{-1-i}{-1+i} = \frac{i^2 - i}{-1+i} = \frac{i(-1+i)}{-1+i} = i$$
$$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right| = |i| = 1$$
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg(i)$$
$$= \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$



D'où AC = AB et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, le triangle ABC en isocèle rectangle en A.

EXERCICE 2

Fonction complexe **(6 points)**

1) $z^2 - 2z + 2 = 0$, on a $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$,
$\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

$z' = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$
z_1 et z_2 sont les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2) $\dfrac{z' + z_N}{2} = \dfrac{-z^2 + 2z + z^2}{2} = \dfrac{2z}{2} = z.$

Donc M est bien le milieu du segment [NM'].

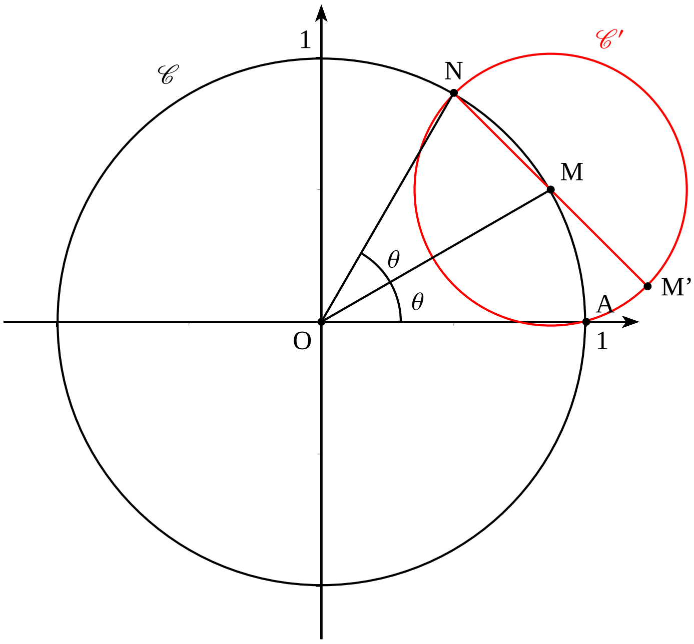
3) a) $M \in \mathscr{C}$ alors :
- $|z| = OM = 1$ et $|z_N| = |z^2| = |z|^2 = 1$
- $\arg(z_N) = \arg(z^2) = 2\arg(z) = 2\theta \ \ [2\pi]$

b) On obtient la figure suivante :

Comme $|z_N| = 1$ alors $N \in \mathscr{C}$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$

N est donc l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et du cercle $\mathscr{C}'$ de centre M et de rayon MA.

On détermine ensuite M' par une symétrie de centre M du point N.



c) Le triangle AMM' est isocèle en M car A et M' sont sur le cercle $\mathscr{C}'$ de centre M.

Exercice 3

Forme exponentielle **(4 points)**

1) a) $-1 + i = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}.$

$|-1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4} \ \ [2\pi].$

b) On pose $a_n = (-1+i)^{2n}$, on a alors :

$$\arg(a_n) = \arg\left[(-1+i)^{2n}\right] = 2n\arg(-1+i) = 2n \times \frac{3\pi}{4} = n \times \frac{3\pi}{2} = n \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\frac{n\pi}{2} \ \ [2\pi]$$

$$a_n \in \mathbb{R}_+^* \iff \arg(a_n) = 0 \ \ [2\pi] \iff -\frac{n\pi}{2} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff n = -4k,\ k \in \mathbb{Z}$$

a_n est un réel strictement positif si, et seulement si, n est un multiple de 4.

2) Faux, un argument de $(-\sqrt{3}+i)^8$ est égal à $\dfrac{2\pi}{3}$, en effet en posant $a = -\sqrt{3}+i$:

$$|a| = \sqrt{3+1} = 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta_a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_a = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \theta_a = \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$$

$$\arg(a^8) = 8\arg(a) = 8 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi].$$

Exercice 4

Divers **(6 points)**

1) $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$$

$$= \arg(d-c) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right) \quad [2\pi]$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1-\sqrt{3}+2i-1-i}{5+i-1-i} = \frac{-\sqrt{3}+i}{4} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) = \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$$

2) $$z = \frac{(2-i)(5+2i)}{3-4i} = \frac{10+4i-5i+2}{3-4i} = \frac{12-i}{3-4i} = \frac{(12-i)(3+4i)}{9+16} = \frac{40+45i}{25}$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{9}{5}i$$

$$|z| = \frac{\sqrt{64+81}}{5} = \frac{\sqrt{145}}{5}$$

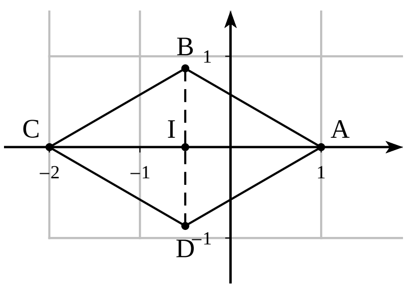
3) a) $(z^2+z-2)(z^2+z+1) = z^4+z^3+z^2+z^3+z^2+z-2z^2-2z-2 = z^4+2z^3-z-2.$

b) $z^4+2z^3-z-2 = 0 \iff (z^2+z-2)(z^2+z+1) = 0 \iff z^2+z-2 = 0$ ou $z^2+z+1 = 0$

- $z^2+z-2 = 0$, $z_1 = 1$ racine évidente, $P = -2$ donc $z_2 = -2$
- $z^2+z+1 = 0$ on a $\Delta = 1-4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$$z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ou} \quad z_4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

c) Pour que quadrilatère ne soit pas croisé, posons A(z_1), B(z_3), C(z_2), D(z_4). On obtient la figure suivante :



$$\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{z_3+z_4}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Donc $\mathrm{I}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ est le milieu de [AC] et [BC]. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

De plus $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \arg\left(\dfrac{z_4-z_3}{z_1-z_2}\right) = \arg\left(\dfrac{-i\sqrt{3}}{-1}\right) = \arg\left(i\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ le parallélogramme ABCD est un losange.