Devoir à rendre pour le mardi 6 janvier 2015

EXERCICE I

Propriétés de la fonction *ln* **(5 points)**

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(x^2-x-2)\leqslant 2\ln(3-x)$

3) La probabilité d'obtenir un double six en lançant n fois deux dés bien équilibrés est :
$p_n=1-\left(\dfrac{35}{36}\right)^n$
Déterminer le nombre minimal de lancers pour que cette probabilité soit supérieure à 0,99.

4) Soit a et b deux réels, et f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=ax+b+\dfrac{\ln x}{x}$
Déterminer a et b pour que la courbe représentative de f passe par le point $A(1\,;0)$ et admette en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y=2x$

EXERCICE II

Logarithme et suite **(10 points)**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x^2+4)$

1) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-x$.

   a) Montrer que pour tout $x\geqslant 0$, $\ln(x^2+4)=2\ln x+\ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)$.

   En déduire la limite de g en $+\infty$.

   b) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ puis établir son tableau de variations.

   c) Montrer que sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution noté α.

   d) Déterminer un encadrement de la valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de l'algorithme par dichotomie. On donnera le nombre d'itérations. On pourra calculer la valeur approché de $g(3)$

   e) Déduire des questions précédentes le tableau de signes de g sur $[0\,;+\infty[$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y=x$ sont tracées sur le graphique en annexe (à rendre avec la copie).

1) En utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparaître les traits de construction.

   Quelle conjecture pouvez-vous faire quant aux variations de la suite (u_n) et à sa convergence ?

2) Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui a pour abscisse α.

3) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante (on pourra s'aider de la partie A). En déduire alors qu'elle converge vers ℓ

   c) Déterminer la valeur ℓ et en donner une valeur approchée au millième.

Exercice III

Pour les non spécialistes **5 points**

Une entreprise décide d'installer dans un petit local un certain nombre d'appareils identiques. Chacun de ces appareils en fonctionnement émet un bruit de 70 décibels.
Soit $(d_n)_{n\geqslant 1}$ la suite donnant le nombre de décibels en fonction du nombre n d'appareils lorsque ces n appareils sont en fonctionnement.
Cette suite est définie par $d_n = 4,329\ln(n) + 70$ pour n supérieur ou égal à 1.

1) Justifier que la suite (d_n) est strictement croissante.

2) Calculer en fonction de n, la différence $d_{10n} - d_n$.

   Peut-on dire que lorsque le nombre d'appareils est multiplié par 10, le nombre de décibels mesurés augmente d'environ 10 ? Justifier la réponse.

3) L'entreprise fait installer 40 de ces appareils dans le local.

   a) Calculer le bruit occasionné par leur fonctionnement simultané.

   b) Le règlement interne de l'entreprise stipule qu'un employé ne doit pas être exposé à un bruit supérieur de 85 dB.

      Un employé refuse de travailler dans le local à cause du bruit. Est-il dans son droit par rapport au règlement ?

4) a) Résoudre l'inéquation $d_n \leqslant 85$ d'inconnue n entier supérieur ou égal à 1.

   b) Conformément à son règlement interne, combien d'appareils n_0 au maximum peut-elle placer dans ce local ?

5) Proposer un algorithme permettant de calculer cette valeur n_0.

   ⚠ Vous testerez votre algorithme pour savoir s'il fonctionne.

6) Quand l'oreille d'une personne normale est soumise à une pression acoustique x, exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est modélisée par : $f(x) = 8,68\ln x + 93,28$ pour $x \in [0,5;25]$.

   Une personne normale ne peut supporter un bruit supérieur à 120 décibels. On veut déterminer la pression acoustique maximale, à 10^{-1} près, qu'elle peut supporter : pour cela, modifier l'algorithme précédent puis donner la réponse.

Exercice IV

Pour les spécialistes **(5 points)**

1) Soit l'équation (E) : $143x + 51y = 1$

   a) Pourquoi l'équation (E) admet-elle des solutions entières ?

   b) A l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de l'équation (E).

   c) Trouver alors toutes les solutions entières de l'équation (E)

   d) Soit x un entier ; démontrer l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} x \equiv 0 \ [51] \\ x \equiv 0 \ [143] \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \equiv 0 \ [7293]$$

   e) Le 1er janvier 2015 qui est un jeudi, on observe deux événements de périodicités respectives de 51 jours et 143 jours. Quand observera-t-on à nouveau ces deux événements un même jours ? Si oui à quelles dates ? (Bonus +1 point)

2) Un jour donné on observe un événement A dont la périodicité est 6 jours et, 8 jours plus tard , on observe un autre événement B dont la périodicité est b jours, b entier, $b \geqslant 1$.

   a) Déterminer le pgcd des entiers 6 et 21.

   b) Dans cette question on suppose $b = 21$; prouver que les événements A et B ne se produiront jamais un même jour.

   c) Déterminer une condition nécessaire portant sur l'entier b pour que les événements A et B puissent se produire un même jour.

Annexe de l'exercice 2

À rendre avec la copie

Prénom :

Nom :