Devoir à rendre pour le lundi 6 janvier 2014

Exercice I

Equation **4 points**

1) Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

   a) $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$ b) $\ln(3x^2-x-2)>\ln(6x+4)$

2) a) Montrer que : $2x^3-3x^2-3x+2=(x+1)(2x^2-5x+2)$

   b) En déduire les solutions de : $2\ln^3 x-3\ln^2 x-3\ln x+2=0$

Exercice II

Fonction auxiliaire **8 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=2x^3-1+2\ln x$

1) Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$ et étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2) Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$. Donner un encadrement de α au centième.
3) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

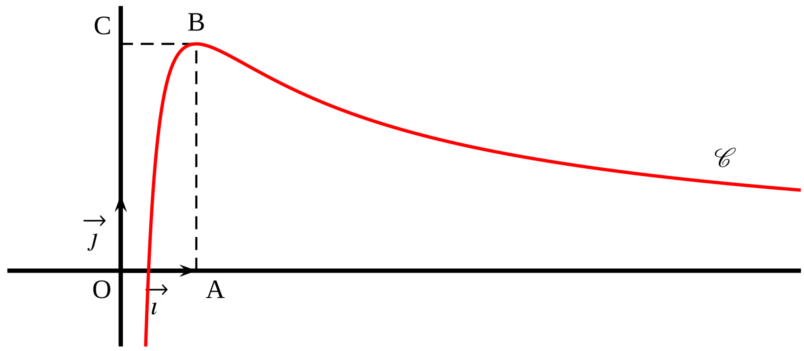
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath};\,\vec{\jmath})$.

1) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2) Montrer que la distance de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ d'équation $y=2x$ tend vers 0 en $+\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
3) Ecrire un algorithme permattant de déterminer l'entier $n\geqslant 2$ tel que $f(n)-2n<10^{-p}$ p étant un entier naturel. Déterminer alors la valeur de n pour $p=3$
4) Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
5) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
6) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{\imath};\,\vec{\jmath})$ en annexe 1. On placera la tangente horizontale.

Exercice III

Déterminer une fonction **2 points**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 3), (0 ; 3) ;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}$$

1) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

2) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

3) En déduire les réels a et b.

Exercice IV

Suite et fonction logarithme **6 points**

Soit f la fonction definie sur l'intervalle$]1;++\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

1) a) Determiner les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

   b) Étudier les variations de la fonction f.

2) Soit (u_n) la suite definie par $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

   a) On a tracé la courbe representative $\mathscr{C}$ de la fonction f en annexe 2.
   Placer les termes u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.
   Quelle conjecture peut-on faire sur les variations et le comportement de la suite (u_n) ?

   b) Demontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant e$.(on pourra utiliser la question 1b)

   c) Calculer la quantité $u_{n+1} - u_n$ en déduire les variations de la suite (u_n) puis que la suite converge vers une limite ℓ.

3) On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $[e : +\infty[$. (On citera le théorème utilisé)
   Déterminer la limite ℓ.

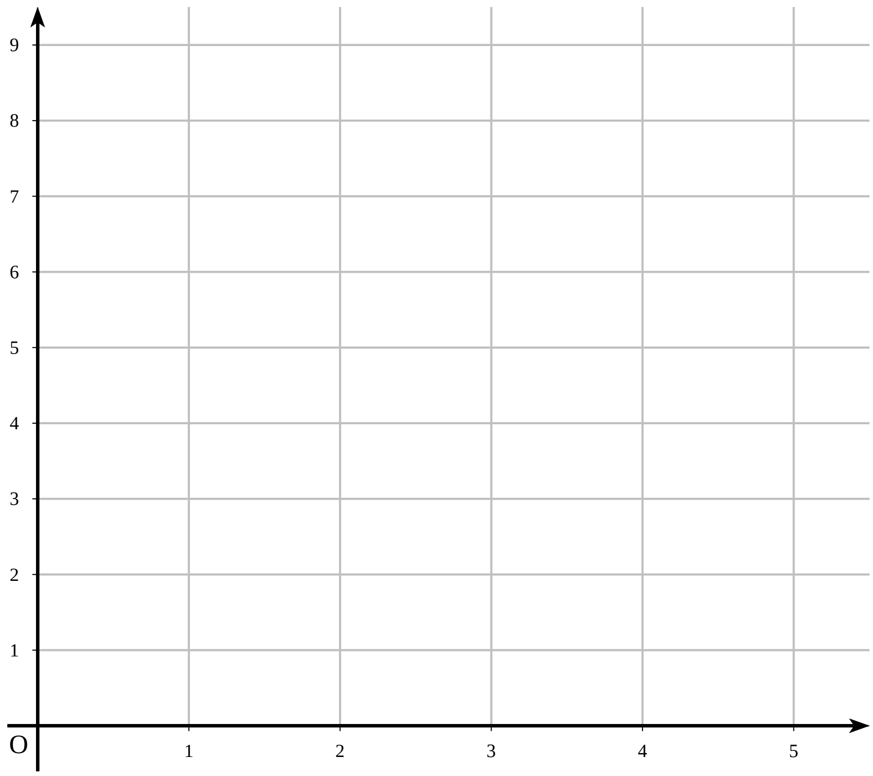
Annexes

(À rendre avec la copie)

Nom :

Prénom :

Annexe 1



Annexe 2