Correction du devoir du 7 janvier 2013

EXERCICE I

Equation **2 points**

Résoudre l'équation et le système suivants :

1) $\ln(2x-3)+\ln(x+1)=\ln(x+9)$

Conditions : $\begin{cases} 2x-3>0 \\ x+1>0 \\ x+9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{2} \\ x>-1 \\ x>-9 \end{cases}$ donc $D_f=\left]\dfrac{3}{2},+\infty\right[$

$x \in D_f, \quad \ln[(2x-3)(x+1)]=\ln(x+9)$

Comme la fonction ln est monotone sur $]0,+\infty[$, on a :

$$x \in D_f, \quad \begin{aligned} &(2x-3)(x+1)=x+9 \\ &2x^2+2x-3x-3=x+9 \\ &2x^2-2x-12=0 \\ &x^2-x-6=0 \end{aligned}$$

$\Delta=1+24=25=5^2$, on obtient deux solutions :

$$x_1=\frac{1+5}{2}=3 \in D_f \qquad x_2=\frac{1-5}{2}=-2 \notin D_f \qquad \text{donc} \quad S=\{3\}$$

2) On pose $X=\ln x$ et $Y=\ln y$. Le système devient alors :

$$\begin{cases} 2X+Y=7 & (1) \\ 3X-5Y=4 & (2) \end{cases}$$

5(1) + (2) donne : $10X+5Y+3X-5Y=35+4 \quad \Leftrightarrow \quad 13X=39$ soit $X=3$

On remplace dans (1), on obtient : $6+Y=7$ soit $Y=1$

On revient à x et y, on a alors :

- $\ln x=3 \quad \Leftrightarrow \quad x=e^3$
- $\ln y=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=e$

$$S=\left\{(e^3,e)\right\}$$

EXERCICE II

Inéquation du 3e degré **4 points**

1) a) On a $P(-1)=2(-1)^3+5(-1)^2+(-1)-2=-2+5-1-2=0$

b) Comme $P(-1)=0$, P se factorise par $(x+1)$. Par une division euclidienne, on a :

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2x^3+5x^2+x-2 & x+1 \\ \cline{3-3}
 & -2x^3-2x^2 & 2x^2+3x-2 \\ \cline{2-2}
 & 0x^3+3x^2+x & \\
 & -3x^2-3x & \\ \cline{2-2}
 & 0x^2-2x-2 & \\
 & +2x+2 & \\ \cline{2-2}
 & 0x+0 &
\end{array}$$

On a alors :

$$P(x) = (x+1)(2x^2+3x-2)$$

c) Racine de : $2x^2+3x-2$

$\Delta = 9+16 = 25 = 5^2$ on a donc 2 racines $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = -2$

On fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		-1		$1/2$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2+3x-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S =]-\infty; -2] \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right]$$

2) $2\ln x + \ln(2x+5) \leqslant \ln(2-x)$

Conditions : $\begin{cases} x > 0 \\ 2x+5 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -\dfrac{5}{2} \\ x < 2 \end{cases}$ donc $D_f =]0, 2[$

$x \in D_f$, $\quad \ln[x^2(2x+5)(x+1)] \leqslant \ln(2-x)$
Comme la fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$, on a :

$$x^2(2x+5) \leqslant 2-x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3+5x^2+x-2 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \leqslant 0$$

En faisant l'intersection entre D_f et S, on trouve : $S' = \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$

Exercice III

Optimisation **8 points**

Partie A

1) La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ car somme de fonctions dérivables.
$u'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$. u' est la somme de deux nombres positifs sur $]0, +\infty[$, $u'(x) > 0$. La fonction u est donc croissante sur $]0, +\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 - 2 = -2 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} u(x) = -\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2 - 2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par somme} \\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} u(x) = +\infty \end{array}$$

2) a) La fonction u est continue (car dérivable) et strictement monotone (croissante) sur $]0,+\infty[$. De plus $0 \in u(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que $u(\alpha) = 0$.

b) On trouve : $1,31 < \alpha < 1,32$

3) Comme la fonction u est croissante sur $]0,+\infty[$, on a :
- Si $0 < x < \alpha$ $u(x) < 0$
- Si $x > \alpha$ $u(x) > 0$

4) On sait que $u(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\alpha = 2 - \alpha^2$

Partie B

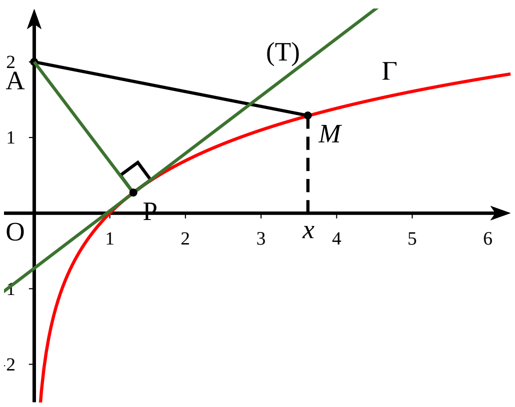
1) On a :

$$f'(x) = 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln x) = \frac{2x^2 - 4 + 2\ln x}{x} = \frac{2u(x)}{x}$$

2) Pour $x \in]0,+\infty[$ $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. On a alors la tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

Partie C

1) 

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (\ln x - 2)^2} \\ &= \sqrt{f(x)} \end{aligned}$$

2) a) La fonction racine étant croissante sur $]0,+\infty[$, les fonction f et g ont même variation sur $]0,+\infty[$.

b) D'après la question B2), f admet un minimum en α, donc comme les fonctions f et g ont même variation sur $]0,+\infty[$, la fonction g admet un minimum en α. La distance AM admet donc un minimum en un point P de coordonnées $(\alpha, \ln\alpha)$.

c) On a : $AP = g(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + (2 - \ln\alpha)^2}$

D'après la question A4), on a : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$ en remplaçant :

$$AP = \sqrt{\alpha^2 + (2 - 2 + \alpha^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$$

3) La droite (AP) a comme vecteur directeur $\overrightarrow{AP}\,(\alpha, \ln\alpha - 2)$

Le coefficient directeur de la tangente (T) en P à Γ vaut : $\ln'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$.

Un vecteur directeur de la tangente (T) est : $\vec{u}\left(1, \dfrac{1}{\alpha}\right)$

En utilisant la relation de la question A4)

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = \alpha + \frac{\ln\alpha - 2}{\alpha} = \alpha + \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha} = \alpha - \alpha = 0$$

Le produit scalaire étant nul, les vecteurs directeurs sont perpendiculaires et donc la droite (AP) est perpendiculaire à la tangente (T).

⚠ On obtient la généralisation de la définition de la distance entre un point et une droite, pour un point et une courbe.

Exercice IV

Algorithme : approximation polynomiale **4 points**

1) Recopier et compléter le tableau suivant donnant les différentes étapes.

	x	t	s	$s-t$	n
Initialisation	0,5				3
Etape 1	0,5	0,375	0,5	0,125	3
Etape 2	0,5	0,4010	0,4167	0,0157	5
Etape 3	0,5	0,4047	0,4073	0,0026	7
Etape 4	0,5	0,4053	0,4058	0,0005	9

2) On remplace le test du "Tantque" par : $s - t < 10^{-5}$

On obtient alors $n = 15$

3) On effectue le programme successivement avec $n = 3$ et $n = 5$ en partant d'un nombre x. On trouve alors :

- $n = 3 \quad s = x - 1 \quad t = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2}$
- $n = 5 \quad s = x - 1 - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} \quad t = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \dfrac{(x-1)^4}{4}$

On obtient alors l'encadrement de $\ln x$ par les deux polynômes suivants :

- $f(x) = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \dfrac{(x-1)^4}{4}$
- $g(x) = x - 1 - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3}$

On peut généraliser cette méthode d'encadrement de la fonction ln par ce qu'on appelle un développement limité (ici série de Mercator) :

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

EXERCICE V

Suites **2 points**

1) Montrons que (v_n) est géométrique :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln u_{n+1} - 2 \\ &= \ln[e\sqrt{u_n}] - 2 \\ &= \ln e + \frac{1}{2}\ln u_n - 2 \\ &= \frac{1}{2}(\ln u_n - 2) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2}$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$

2) On trouve $v_n = v_0\, r^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

On a donc $\ln u_n = v_n + 2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2$ donc $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

3) a) On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

b) On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 = 2$ par compostion $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2$