Contrôle de mathématiques

Lundi 04 décembre 2017

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x$.

1) Étudier les variations de f et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0$.

2) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

3) En faisant un changement de variable astucieux démontrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

EXERCICE 2

Propriétés, équation et inéquation **(3 points)**

On justifiera chaque étape des résolutions suivantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

   a) $e^{x^2+5} = e^{2x+4}$ b) $xe^{2x} - 2e^{2x} = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $e^{2x-1} > e^x$.

EXERCICE 3

Limite et dérivée. **(4 points)**

1) En mettant en évidence les limites de référence, déterminer les limites suivantes

   a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{3x}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)e^x$

2) Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)e^{2x+1}$.
   Donner les variations de f. On ne demande par les limites en $-\infty$ et $+\infty$

EXERCICE 4

Un grand BOUM **(10 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$. $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - xe^x + 1$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) Étudier les variation de g, puis dresser le tableau de variation de g.

3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

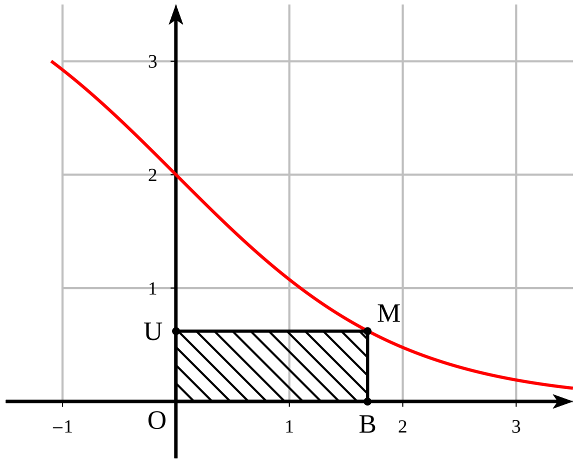
   Donner un encadrement à 10^{-3} de α à l'aide de l'algorithme de dichotomie. On donnera le nombre d'itérations. On pourra calculer $g(2)$.

4) Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

5) Étudier le signe de $g(x)$.

Partie B

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f. Soit M un point de $\mathscr{C}_f$ et B et U les projetés de M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.



1) Soit $\mathscr{A}$ la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}^*$ associe l'aire du rectangle BOUM.
   a) Déterminer $\mathscr{A}(x)$.
   b) Démontrer que $\mathscr{A}'(x) = \dfrac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}$.
   c) En déduire les variations de $\mathscr{A}$.
2) Montrer que l'aire du rectangle BOUM est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   Déterminer un encadrement de cette aire maximale à l'aide de la partie A.
3) Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse α est parallèle à la droite (BU).