Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 14 décembre 2015

EXERCICE 1

ROC Voir cours **(3 points)**

EXERCICE 2

Propriétés, équation et inéquation **(3 points)**

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) Comme la fonction exp est monotone sur $\mathbb{R}$

$$e^{3x-x} = 1 \Leftrightarrow e^{3x-1} = e^0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

b) Comme la fonction exp est monotone sur $\mathbb{R}$ et $e^a \times e^b = e^{a+b}$, $(e^x)^2 = e^{2x}$

$$e^{3-x} \times e^{2x-1} = \left(e^{5+x}\right)^2 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{10+2x} \Leftrightarrow x + 2 = 2x + 10 \Leftrightarrow x = -8 \Leftrightarrow$$

$$S = \{-8\}$$

2) Comme la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$

$$e^{x^2-x} < e \Leftrightarrow x^2 - x < 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0$$

On calcule $\Delta = 1 + 5 = 5$, deux racines : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

On prend à l'intérieur des racines : $S = \left]\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$

EXERCICE 3

Limite et dérivée. **(2 points)**

1) On ne peut résoudre la limite par produit (forme $+\infty \times 0$), on développe :

$(3-x)e^x = 3e^x - xe^x$, des limites de référence $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$,

On déduit par produit et somme : $\lim\limits_{x\to-\infty} (3-x)e^x = 0$

2) On dérive f avec : $(e^u)' = u'e^u$ et $(uv)' = u'v + uv'$,

$$f'(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

EXERCICE 4

Fonction **(4 points)**

1) • En $+\infty$, forme indéterminée, on factorise le dénominateur par e^x pour $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 - \dfrac{x}{e^x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Par somme et quotient, on a alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

- En $-\infty$, on ne change pas la forme :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Par quotient}\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0\end{array}$$

2) On dérive f avec : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(e^x - x - e^x + 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$$

3) Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x > 0$, on a :
- $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 1 - x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1$
- signe de $f'(x)$ = signe de $(1 - x)$

On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

Exercice 5

D'après le bac **(7 points)**

1) a) On dérive avec : $(e^u)' = u'e^u \ \Rightarrow\ g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$

On développe la quantité proposée :
$(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2(e^x)^2 + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1 = g'(x)$

b) Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ alors $2e^x + 1 > 1 > 0$. Donc :

- $g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ e^x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$
- Signe de $g'(x)$ = signe de $e^x - 1$, comme la fonction exp est croissante, on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Le minimum de g est donc zéro.

2) a) $u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$

D'après la question 1) b), $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est croissante.

b) Soit la proposition : $\forall n, \quad u_n \leqslant 0$.

Initialisation : $u_0 = -1 < 0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Supposons que $u_n < 0$ montrons que $u_{n+1} < 0$

$u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$

- $u_n < 0$ (hyp. récurrence) donc $e^{u_n} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{u_n} - 1 < 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{u_n} > 0$

Par produit $e^{u_n}(e^{u_n} - 1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} < 0$

La proposition est héréditaire

Par initialisation et hérédité $\forall n, \quad u_n \leqslant 0$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 0, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente vers $\ell \leqslant 0$

d) On pose $f(x) = e^{2x} - e^n$
La suite (u_n), définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, est convergente vers $\ell \leqslant 0$. La fonction f est continue sur $]-\infty\,;\, 0]$ par produit et somme de fonctions continues, d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation :
$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - e^x = x \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - e^x - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0$

D'après l'étude de la fonction g à la question 1) b), l'équation $g(x) = 0$ admet 0 comme unique solution donc $\ell = 0$

3) a) On a l'algorithme complété ci-contre

b) On trouve alors $n = 64$

```
Variables : n, p : entiers   u : réel
Entrées et initialisation
    Saisir la valeur de p
    n prend la valeur 0
    u prend la valeur −1
Traitement
    tant que |u_n| ⩾ 10^(−p) faire
        n prend la valeur n + 1
        u prend la valeur e^(−2u) − e^u
    fin
Sorties : Afficher n
```

Exercice 6

Trouver une fonction **(2 points)**

1) Si la tangente en 1 est horizontale alors $f'(1) = 0$

- $f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = e^{-x}(a - ax - b) = e^{-x}(-ax + a - b)$
- $f'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-1}(-a + a - b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-1}(-b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0$

2) La hauteur du toboggan est donné par $f(1) = ae^{-1} = \dfrac{a}{e}$

On doit avoir $3,5 \leqslant \dfrac{a}{e} \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3,5e \leqslant a \leqslant 4e$

or $3,5e \approx 9,5$ et $4e \approx 10,8$ comme a est entier $a = 10$

La fonction cherchée est donc $f(x) = 10xe^{-x}$