Correction contrôle de mathématiques

Mardi 09 décembre 2014

EXERCICE 1

ROC **(3 points)**

1) $f'(x) = e^x - x$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > x \Rightarrow f'(x) > 0$.
   La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$
2) Voir cours
3) Voir cours

EXERCICE 2

Propriétés, équation et inéquation **(3 points)**

Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

1) a) $e^{x^2-5} = e^{-4x} \Leftrightarrow x^2 - 5 = -4x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

   $x_1 = 1$ est racine évidente, $P = -5$, donc $x_2 = -5$ d'où $S = \{-5;\ 1\}$

   b) $e^{x+1} \times e^{3x+5} = 1 \Leftrightarrow e^{x+1+3x+5} = 1 \Leftrightarrow e^{4x+6} = e^0 \Leftrightarrow 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

   $S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

2) $e^{7-3x^2} > e^{2-2x} \Leftrightarrow 7 - 3x^2 > 2 - 2x \Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 5 > 0$

   $x_1 = -1$ racine évidente, $P = -\dfrac{5}{3}$, donc $x_2 = \dfrac{5}{3}$. On prend à l'intérieur des racines

   $S = \left]-1;\ \dfrac{5}{3}\right[$

EXERCICE 3

Limites - Forme indéterminée. **(3 points)**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

b) $(x+1)e^x = xe^x + e^x$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

   Par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x + e^x = 0$

c) $\dfrac{1-e^x}{2x} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{e^x - 1}{x}$ or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

   Par produit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^x}{2x} = -\dfrac{1}{2}$

EXERCICE 4

Dérivées **(3 points)**

a) $f'(x) = -\dfrac{3(-2)e^{-2x}}{(1+e^{2x})^2} = \dfrac{6e^{2x}}{(1+e^{-2x})^1}$

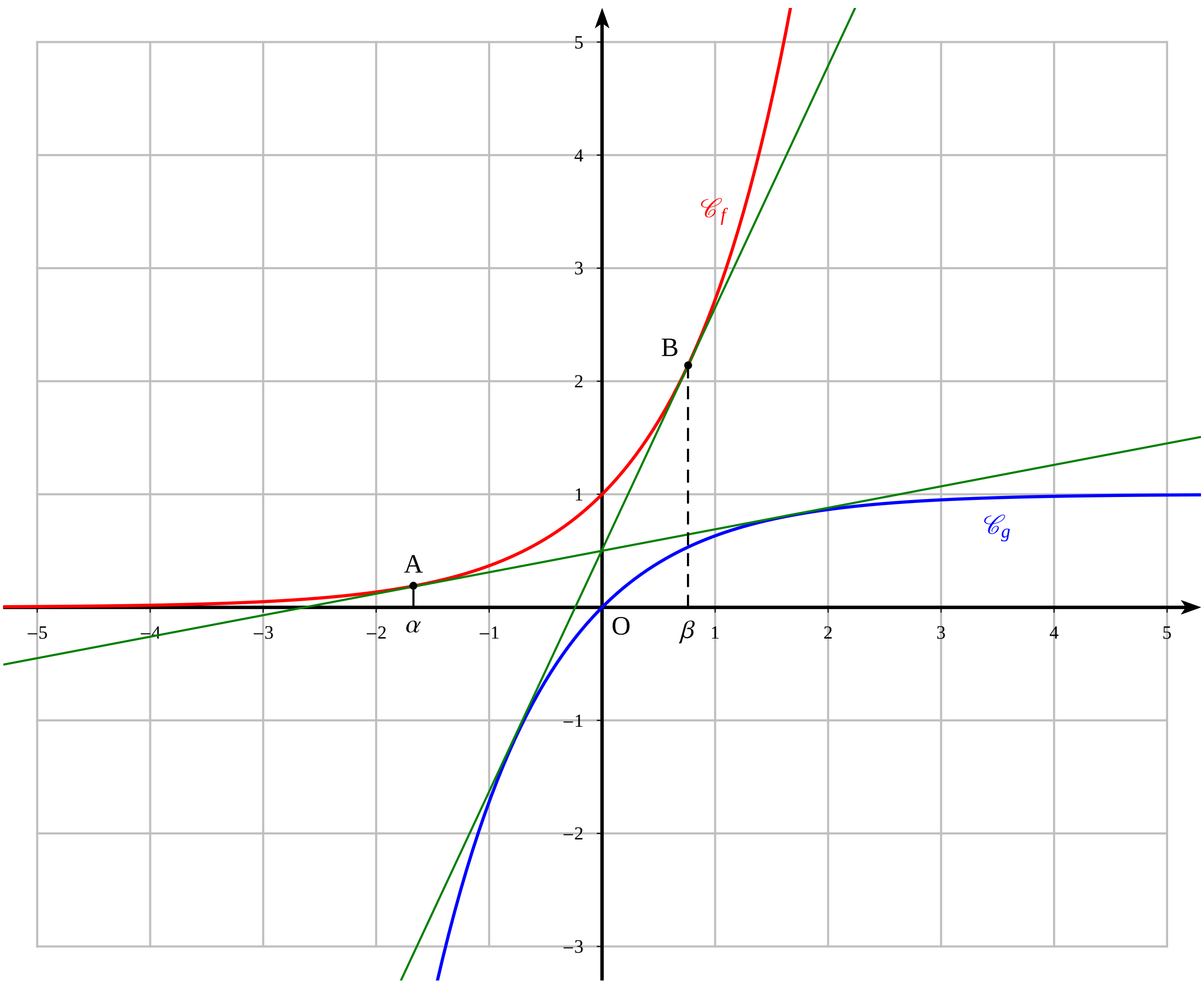
b) $g'(x) = 1 - 3e^{-x^2} + 3x(2x)e^{-x^2} = 1 + 3(2x^2-1)e^{-x^2}$

c) $h'(x) = \dfrac{3e^x(e^x-2) - 3e^x \times e^x}{(e^x-2)^2} = \dfrac{3e^{2x} - 6e^x - 3e^{2x}}{(e^x-2)^2} = \dfrac{-6e^x}{(e^x-2)^2}$

EXERCICE 5

Exercice bac **(8 points)**

On trace les deux tangentes communes aux courbes des fonctions f et g



Partie B

1) a) Soit m le coefficient directeur de $\mathscr{D}$, tangente en A à $\mathscr{C}_f$: $m = f'(a) = e^a$

b) Soit m le coefficient directeur de $\mathscr{D}$, tangente en B à $\mathscr{C}_g$: $m = g'(b) = e^{-b}$
car $g'(x) = -(-1)e^{-x} = e^{-x}$

c) Les deux coefficients directeurs étant égaux : $e^a = e^{-b} \quad \Leftrightarrow \quad a = -b$

2) Équation de la tangente $\mathscr{D}$ en A à $\mathscr{C}_f$:
$y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \Leftrightarrow \quad y = e^a(x-a) + e^a$

Équation de la tangente $\mathscr{D}$ en B à $\mathscr{C}_g$:
$y = g'(b)(x-b) + g(b) \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{-b}(x-b) + 1 - e^{-b}$

On sait que $f'(a) = g'(b)$ et $a = -b$ donc l'équation de la tangente en B devient
$y = e^a(x+a) + 1 - e^a$
En égalisant les deux équations, on trouve

$$e^a(x-a) + e^a = e^a(x+a) + 1 - e^a \quad \Leftrightarrow \quad xe^a - ae^a + e^a = xe^a + ae^a + 1 - e^a \quad \Leftrightarrow$$

$$2ae^a - 2e^a + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(a-1)e^a + 1 = 0$$

Le réel a vérifie donc l'équation $2(x-1)e^x + 1 = 0$

Partie C

1) a) En $+\infty$ pas d'indétermination :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2(x-1) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par produit } \lim_{x\to+\infty} 2(x-1)e^x = +\infty$$

Par somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

En $-\infty$, forme indéterminée $\varphi(x) = 2xe^x - 2e^x + 1$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{array}\right\} \text{ Par produit et somme } \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1$$

b) $\varphi'(x) = 2e^x + 2(x-1)e^x = e^x(2 + 2x - 2) = 2x\,e^x$
- $\varphi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
- signe de $\varphi'(x)$ = signe de $2x$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{>}0$

c) On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) Sur $\mathbb{R}_-$, la fonction φ est continue (car dérivable), monotone (décroissante) et $0 \in \varphi(\mathbb{R}_-) =]-1;\ 1]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_-$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction φ est continue (car dérivable), monotone (croissante) et $0 \in \varphi(\mathbb{R}_+) =]-1; +\infty]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\varphi(\beta) = 0$

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc deux solutions sur $\mathbb{R}$, une négative et une positive

b) $\varphi(-2) \simeq 0,188$ donc $\varphi(-2) \times \varphi(0) < 0$ d'où $-2 < \alpha < 0$
$\varphi(1) = 1$ donc $\varphi(0) \times \varphi(1) < 0$ d'où $0 < \beta < 1$.

On trouve alors $-1,679 < \alpha < -1,378$ en 11 itérations et $0,768 < \beta < 0,769$ en 10 itérations