Intégration par la méthode de Monte-Carlo

1 Une autre méthode d'intégration numérique

On a vu dans le chapitre 8 : intégration et primitive, la méthode de Riemann qui consiste à encadrer l'aire, sous une courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f donnée, par deux séries de rectangles. L'une donne la borne inférieure et l'autre la borne supérieure. On pourrait éventuellement augmenter la rapidité de convergence, en prenant des trapèzes au lieu de rectangles.
Ces deux méthodes partent de l'hypothèse que l'aire à calculer n'est pas trop tourmentée et que la surface peut être facilement découpée en rectangles ou trapèzes. Si l'aire est telle qu'il devient très compliqué d'utiliser la méthode des rectangles ou des trapèzes, on a recours à une solution venant des probabilités. Cette solution repose sur la méthode de Monte-Carlo, universellement exploitée dans le monde de la simulation pour sa puissance et son efficacité. On peut, mis à part l'utilisation de l'intégration, l'utiliser pour simuler la désintégration d'une population de noyaux radioactifs, le refroidissement d'un verre, le comportement d'un gaz d'électrons,....

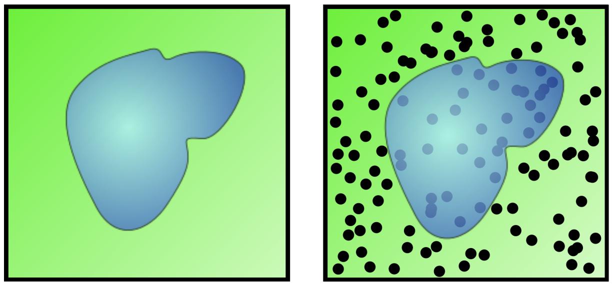
Il est à noter que la méthode de Monte-Carlo est une méthode moins précise que la méthode des trapèzes. Ce manque de précision est dû à l'usage obligatoire d'un générateur de nombres aléatoires, dont la qualité influe sur la précision du calcul. Il est en effet impossible de créer, avec un algorithme, une suite de nombres parfaitement aléatoire. On se contente donc de générer des suites pseudo-aléatoires avec un ordinateur ou une calculatrice. Une suite de nombres pseudo-aléatoire est une suite périodique, de période aussi grande que possible, dont les nombres, à l'intérieur de chaque période, sont aussi peu corrélés entre eux que possible (c'est à dire le plus indépendants les uns des autres). Celles que l'on implémente de façon standard sur les calculateurs grand public ont une période de l'ordre de 2^{32}, soit environ 4,3 milliards.

Enfin, disons qu'il serait dommage de cantonner la méthode de Monte-Carlo au calcul d'intégrales ! C'est une méthode inspirée de la physique statistique, qui offre un moyen très puissant pour comprendre beaucoup de phénomènes dans tous les domaines de la physique.

2 Principe de la méthode de Monte-Carlo

Prenons l'exemple suivant : déterminer la surface d'un lac. Soit une zone rectangulaire ou carrée dont les côtés sont de longueurs connues. Au sein de cette aire se trouve un lac dont la superficie est inconnue. Grâce aux mesures des côtés de la zone, on connaît l'aire du rectangle. Pour trouver l'aire du lac, on demande à la population du coin de lancer N cailloux de manière aléatoire sur cette zone. On compte ensuite le nombre n de cailloux qui sont restés sur le terrain ; on peut ainsi déterminer le nombre de cailloux $N - n$ qui sont tombés dans le lac. Il suffit ensuite d'établir un rapport entre les valeurs :

$$\frac{\text{aire}_{\text{lac}}}{\text{aire}_{\text{terrain}}} = \frac{N-n}{N} \quad \Leftrightarrow \quad \text{aire}_{\text{lac}} = \frac{N-n}{N} \times \text{aire}_{\text{terrain}}$$

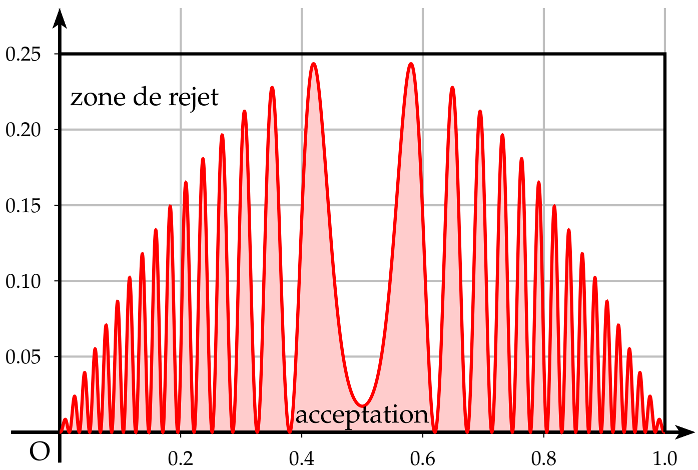


3 Un exemple

Soit la fonction f suivante définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = x(1-x)\sin^2\left[200x(1-x)\right]$$

On obtient la courbe suivante :



On cherche à déterminer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

La primitive est très compliquée à déterminer et la méthode de Riemann des rectangles pour déterminer une valeur approchée de I est très difficile à mettre en œuvre.

Une méthode à l'aide d'une variable aléatoire continue X suivant une loi uniforme est alors plus adaptée. On peut proposer le programme suivant basé sur la méthode de Monte Carlo :

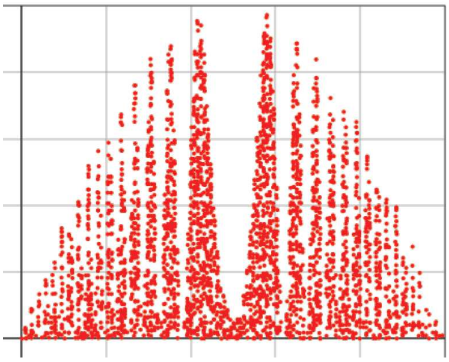
3.1 Méthode du rejet

On trouve alors pour $N = 10\,000$:

$$I \simeq 0{,}081\,575$$

A comparer avec la valeur trouvée par Maple : $I = 0{,}080\,497\,718\,34$

On obtient le graphique suivant :



Variables : N, D, K entiers
et X, Y réels
Entrées et initialisation
Effacer l'écran
Lire N
$0 \to D$
Traitement
pour K de 1 à N **faire**
random(0,1)$\to X$
$\dfrac{1}{4} \times$ random(0,1) $\to Y$
si $Y \leqslant f(X)$ **alors**
$D + 1 \to D$
Tracer le point (X, Y)
fin
fin
Sorties : Afficher $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{D}{N}$

3.2 Méthode de l'espérance

Cette méthode est basée sur la valeur moyenne μ de l'intégrale I entre les valeurs a et b

$$\mu = \frac{1}{b-a} \times I \quad \Leftrightarrow \quad I = (b-a) \times \mu$$

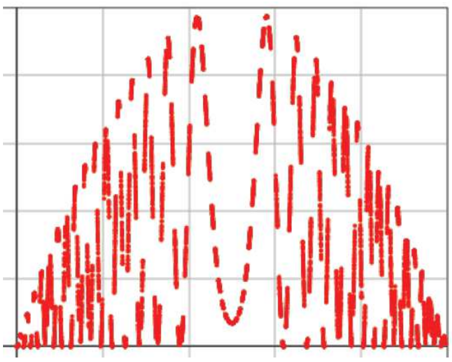
On évalue la valeur de μ à l'aide de l'espérance E(X) de la variable aléatoire X.

On trouve pour $N = 10\,000$

$$I = 0{,}080\,544\,116$$

A comparer avec la valeur trouvée par Maple : $I = 0{,}080\,497\,718\,34$

On obtient le graphique suivant :



Variables : N, K entiers
et X, S, I réels
Entrées et initialisation
Effacer l'écran
Lire N
$0 \to S$
Traitement
pour K de 1 à N **faire**
random(0,1)$\to X$
$S + f(X) \to S$
Tracer le point $(X, f(X))$
fin
$\dfrac{S}{N} \to I$
Sorties : Afficher I