Contrôle de mathématiques

Lundi 24 mars 2014

Exercice 1

ROC **(3 points)**

1) Démontrer que : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$

2) Application : Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$
Indication : on pourra décomposer cette limite en deux limites connues)

Exercice 2

Équations et inéquations trigonométrique **(3 points)**

1 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

a) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

b) $\cos(2x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

2 Résoudre les inéquations suivantes dans $]-\pi;\pi]$

a) $2\cos x + \sqrt{3} \geqslant 0$

b) $\sqrt{2}\sin x - 1 < 0$

Exercice 3

Fonction trigonométrique **(4 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(2x) + 2\cos x$

1) Déterminer la période et la parité de la fonction f. Sur quel intervalle le plus petit possible peut-on étudier la fonction f ? Pourquoi ?

2) Montrer que la fonction dérivée peut se mettre sous la forme :

$$f'(x) = -2\sin x(2\cos x + 1)$$

3) a) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ sur l'intervalle $[0;\pi]$

b) Étudier le signe de la dérivée f' sur $[0;\pi]$. On fera un tableau de signes.

4) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-\pi;\pi]$

5) Tracer la fonction f sur l'annexe dans l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$. On laissera les points et les traits de construction.

Exercice 4

Primitives **(5 points)**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer ces primitives

1) $f(x) = \dfrac{2x-5}{(x^2-5x+1)^2} \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{4}{2x+1} \quad I = \left]-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

3) $f(x) = e^{5x-1} \quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-5} \quad I =]\ln 5; +\infty[$

5) $f(x) = \cos x \sin^2 x \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 5

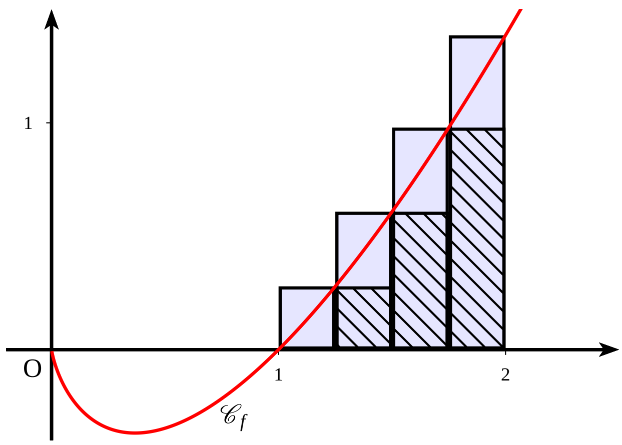
Surface **(5 points)**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x)$$

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$.

Variables : k, n entier naturels
U, V réels
Entrées et initialisation
$0 \to U$
$0 \to V$
$4 \to n$
Traitement
pour k allant de 0 à $n-1$ **faire**
$U + \dfrac{1}{n} f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right) \to U$
$V + \dfrac{1}{n} f\left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right) \to V$
fin
Sorties : Afficher U, V



1) a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ?
   b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
   c) En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.
   d) Modifier cet algoritme pour qu'il donne un encadrement de $\mathscr{A}$ en découpant la surface en n rectangles. Donner un nouvel encadrement de $\mathscr{A}$ avec $n = 14$.

2) Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.
   a) Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   b) Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

Annexe

(À rendre avec la copie)

Nom :

Prénom :