Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 25 février 2013

Exercice 1

ROC **(6 points)**

1) Cf cours

2) a) $\displaystyle\int \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u}\,,\quad f(x) = \frac{4}{3}\left[\frac{3}{(3x-1)^2}\right]$ donc $F(x) = \dfrac{-4}{3(3x-1)}$

b) $\displaystyle\int u'u = \frac{1}{2}u^2\,,\quad f(x) = \frac{1}{x}\ln x$ donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$

c) $\displaystyle\int u'e^u = e^u\,,\quad f(x) = -\frac{1}{2}\left(-2e^{1-2x}\right)$ donc $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{1-2x}$

d) $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|\,,\quad f(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$ donc $F(x) = \dfrac{3}{2}\ln(x^2-1)$

e) $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}\,,\quad f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ donc $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 2

Intégrale **(3 points)**

1)
$$\begin{aligned}\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} &= \frac{a(x^2-1) + bx(x-1) + cx(x+1)}{x(x+1)(x-1}\\ &= \frac{ax^2 - a + bx^2 - bx + cx^2 + cx}{x(x+1)(x-1}\\ &= \frac{(a+b+c)x^2 + (-b+c)x - a}{x(x+1)(x-1}\end{aligned}$$

On identifie à $f(x)$. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+c = 0\\ -b+c = 0\\ -a = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1\\ b = c\\ 2b = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1\\ b = \dfrac{1}{2}\\ c = \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

On a donc : $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x-1)}$

2) Les différents termes de f sont de la forme $\dfrac{u'}{u}$ qui donne $\ln|u|$. On obtient alors :

$$F(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)$$

3) On a alors :

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1)\right]_2^3 \\
&= -\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 2 - \left(-\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 1\right) \\
&= -\ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

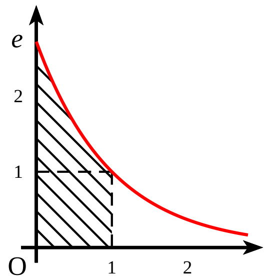
Exercice 3

Intégrale et suite **(6 points)**

1) La primitive de e^{1-x} est $-e^{1-x}$, on a alors :

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = -e^0 + e = e - 1$$

2) I_0 représente l'aire du domaine délimité par la courbe de e^{1-x}, les axes et la droite d'équation $x = 1$. Voir la partie hachurée ci-contre



3) On a : $I_1 = I_0 - 1 = e - 2$ et $I_2 = 2I_1 - 1 = 2e - 4 - 1 = 2e - 5$

4) Ce programme calcule les termes successifs de I_n avec la relation de récurrence du 3). Il effectue 10 boucles en partant de I_0. Il calcule donc I_{10}

Le programme donne : $X = I_{10} \simeq 0,099$.
On peut faire la conjecture que la suite (I_n) converge vers 0.

5) a) $0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant -x \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 1 - x \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow$

$1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e$ car exp est croissante $\Leftrightarrow$ $(\times x^n \geqslant 0)$ $\quad x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e$

b) On intègre l'inégalité. On obtient alors :

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n e\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}e}{n+1}\right]_0^1 \quad \Leftrightarrow$$

$\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) converge vers 0.

Exercice 4

Volume **(3 points)**

1) D'après la définition de ce solide de révolution, on :

$$z = e^{1-r} \quad \Leftrightarrow \quad \ln z = 1 - r \quad \Leftrightarrow \quad r = 1 - \ln z$$

On a alors : $\displaystyle\int_1^e \pi r^2(z)\,\mathrm{d}z = \pi \int_1^e (1-\ln z)^2\,\mathrm{d}z$

2) $F(x) = 5x - 4x\ln x + x\ln^2 x$

$$\begin{aligned}F'(x) &= 5 - 4\ln x - 4x \times \frac{1}{x} + \ln^2 x + 2x \times \frac{1}{x}\ln x\\ &= 5 - 4\ln x - 4 + \ln^2 x + 2\ln x\\ &= 1 - 2\ln x + \ln^2 x\\ &= (1-\ln x)^2 = f(x)\end{aligned}$$

La fonction F est donc bien une primitive de f.

3) $$\begin{aligned}V &= \pi\int_1^e (1-lnz)^2 = \pi\left[5z - 4z\ln z + z\ln^2 z\right]_1^e\\ &= \pi\left[5e - 4e\ln e + e\ln^2 e - (5 - 4\ln 1 + \ln^2 1)\right]\\ &= \pi(5e - 4e + e - 5) = \pi(2e-5) \simeq 1,372\end{aligned}$$

Exercice 5

Cinématique **(2 points)**

1) D'après la définition de la valeur moyenne, on a :

$$\begin{aligned}v_{\text{moy}} &= \frac{1}{30}\int_0^{30} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{30}\int_0^{30}(t^2+5t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{30}\left[\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2}\right]_0^{30} = \frac{1}{30}\left(\frac{27\ 000}{3} + \frac{5\times 900}{2}\right)\\ &= \frac{1}{30}(9\ 000 + 2\ 250) = 375\ \text{m.s}^{-1}\end{aligned}$$

2) La distance parcourue d est alors :

$$d = v_{\text{moy}} \times t = 375 \times 30 = 11\ 250\ \text{m} = 11,25\ \text{km}$$