Correction contrôle de mathématiques
Du lundi 26 mai 2014

Exercice 1

Fabrication de billes **(8 points)**

Partie A

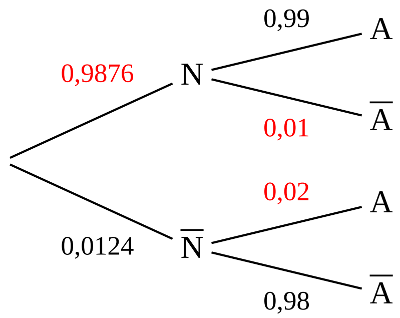
1) X suit la loi normale $\mathcal{N}(10; 0,4^2)$. Pour que la bille soit hors norme, son diamètre doit être inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm

$$\begin{aligned} P(X < 9 \text{ ou } X > 11) &= 1 - P(9 \leqslant X \leqslant 11) = 1 - (P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9) \\ &= 1 - (0{,}993\,8 - 0{,}006\,2) = 0{,}012\,4 \end{aligned}$$

Si on utilise sa calculatrice, on tape : "1 – *normalFrép*(9,11,10,0.4)"

2) On a : $P_{\overline{N}}(\overline{A}) = 0,98$ et $P_N(A) = 0,99$

a) On a l'arbre suivant :



b) On a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N \cap A) + P(\overline{N} \cap A) \\ &= 0,9876 \times 0,99 + 0,0124 \times 0,02 \\ &= 0,99777 + 0,00025 \\ &= 0,9980 \end{aligned}$$

c) On a :

$$P_A(\overline{N}) = \frac{P(\overline{N} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,0003}{0,9980} = 0,0003$$

Partie B

1) On effectue 100 expériences identiques et indépendantes (tirage avec remise). Chaque expérience possède une probabilité que la bille soit hors norme de 0,0124. Y suit dont une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0124$.

2) $E(Y) = np = 100 \times 0,0124 = 1,24$ et
$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1,24 \times 0,9876} = 1,1066$

3) $P(Y = 2) = \binom{100}{2} \times 0,0124^2 \times 0,9876^{98} = 0,2241$ "*binomFdp*(100 , 0.0124 , 2)"

4) $P(Y \leqslant 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = 0,6477$ "*binomFrép*(100 , 0.0124 , 1)"

EXERCICE 2

Droites et plans dans l'espace **(8 points)**

1) A, B et C alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires.

   On a : $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$

   Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles $\left(\frac{1}{2} \neq \frac{1}{5}\right)$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points ne sont pas alignés.

2) a) La droite Δ est orthogonale à (ABC) si elle est orthogonale à deux droites sécantes de (ABC) dont orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 0$$
$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3) = 0$$

   b) Le vecteur $\vec{u}$ est donc normal au plan (ABC). Un point quelconque M du plan (ABC) vérifie alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-0)-(y-4)+3(z-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-y+3z+1=0$$

   c) Comme la droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}$ passe par D :

$$\begin{cases} x = 7+2t \\ y = -1-t \\ z = 4+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

   d) Les coordonnées du point H vérifie l'équation du plan (ABC) et la représentation paramétrique de la droite Δ. On a donc :

$$2(7+2t)-(-1-t)+3(4+3t)+1=0$$
$$14+4t+1+t+12t+9t+1=0$$
$$14t=-28 \quad \text{donc} \quad t=-2$$

   En remplaçant dans la représentation paramétrique de Δ, on obtient : $H(3;1;-2)$

3) a) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ non colinéaires.

   D'après les équations cartésiennes des plan $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, on obtient $\vec{n}_1(1;1;1)$ et $\vec{n}_2(1;4;0)$

   Les coordonnées des vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas proportionnelles $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{1}{4}\right)$ donc les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires.

   b) Les points de la droite d vérifie les équations cartésiennes des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, en prenant comme valeur du paramètre $y=t$, on obtient la représentation paramétrique de la droite d suivante :

$$d \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+4y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=t \\ x=-2-4t \\ z=2+4t-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-4t \\ y=t \\ z=2+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

c) Un vecteur directeur de la droite d est $\vec{v}(-4; 1; 3)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-4) + 1(-1) + 3 \times 3 = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires donc la droite d et le plan (ABC) sont parallèles.

Exercice 3

Malformation cardiaque **(2 points)**

1) L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % vaut :

$$\left[p - 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0,0706 \,;\, 0,1294]$$

2) $f_{\text{obs}} = \dfrac{60}{400} = 0,15 \notin I$

Le taux de malades dans cet échantillon est anormalement élevé.

Exercice 4

Vrai-Faux **(2 points)**

1) **Affirmation 1 : Vraie**

Un vecteur directeur de la droite Δ est : $\vec{u} = (1; 3; -2)$

$\Delta \perp$ à toute droite de $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow$ $\Delta \perp$ à deux sécantes de $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \perp$ à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a : $\overrightarrow{AB}(4; -2; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; -1; -2)$ d'où :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 4 + 3 \times (-3) - 2 \times (-1) = 4 - 6 + 2 = 0$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 3 \times (-1) - 2 \times (-2) = -1 - 3 + 4 = 0$$

Δ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$

2) **Affirmation 2 : Fausse**

Des coordonnées de A et $\overrightarrow{AB}$, on obtient la représentation paramétrique de (AB) :

$$\begin{cases} x = 4s \\ y = -2s - 1 \qquad s \in \mathbb{R} \\ z = -s + 1 \end{cases}$$

- $\vec{u}(1; 3; -2)$ et $\overrightarrow{AB}(4; -2; -1)$. Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas proportionnelles $\left(\frac{1}{4} \neq -\frac{3}{2}\right)$, donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires. Les droite Δ et (AB) ne sont pas parallèles.
- Cherchons l'intersection I des droites Δ et (AB). Les coordonnées de I doivent vérifier les deux représentations paramétriques.

$$\begin{cases} t = 4s \\ 3t = -2s - 1 \\ -2t + 8 = -s + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4s \\ 12s = -2s - 1 \\ -8s + 8 = -s + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4s \\ 14s = -1 \\ -7s = -7 \end{cases} \quad \text{incompatible}$$

Les droites Δ et (AB) ne sont ni parallèles ni sécantes, elles ne sont donc pas coplanaires.