Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 03 juin 2013

Exercice 1

Droites et plans **(8 points)**

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1) \qquad \overrightarrow{AC}(2; -5; -3)$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles $(2/1 \neq -5/-1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et donc les point A, B et C ne sont pas alignés.

2) a) Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan. On doit donc avoir : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
Vérifions le :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\times1+(-1)\times(-1)-3\times(-1) = 0 \qquad \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\times2+(-1)\times(-5)+3\times(-3) = 0$$

Δ est donc perpendiculaire au plan (ABC).

b) Si $\Delta \perp$ (ABC) alors $\vec{u}$ est un vecteur normal de (ABC). Soit $M(x; y; z)$ un point du plan (ABC), on a alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - (y-4) + 3(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y + 3z + 1 = 0$$

c) Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque de la droite Δ. On alors :

$$\Delta \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

d) Soit $H(x; y; z)$ le point d'intersection de Δ et (ABC). En remplaçant les coordonnées de H dans l'équation du plan (ABC), on a :

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z + 1 &= 0 \\ 2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 &= 0 \\ 14 + 4t + 1 + t + 12 + 9t + 1 &= 0 \\ 14t &= -28 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

En remplaçant dans les coordoonées de H, on obtient $H(3; 1; -2)$

3) a) Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants alors leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.
Or $\vec{n}_1 = (1; 1; 1)$ et $\vec{n}_2 = (1; 4; 0)$. Manisfestement les coordonnées de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b) La droite Δ est définie par le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=0 & (1) \\ x+4y+2=0 & (2) \end{cases}$$

De (2), on a : $x=-2-4y$

On remplace dans (1) : $-2-4y+y+z=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=2+3y$

On pose $y=t$, on obtient alors la représentation paramétrique suivante :

$$d \begin{cases} x=-2-4t \\ y=t \\ z=2+3t \end{cases}$$

c) Pour déterminer l'intersection de la droite d avec le plan (ABC), on remplace les coordonnées de d dans l'équation du plan (ABC).

$$\begin{aligned} 2x-y+3z+1&=0 \\ 2(-2-4t)-t+3(2+3t)+1&=0 \\ -4-8t-t+6+9t+1&=0 \\ 0t&=-3 \quad \text{impossible} \end{aligned}$$

d et (ABC) n'ont pas de point commum donc d et (ABC) sont parallèles.

Exercice 2

Vrai - Faux **(4 points)**

1) **Proposition 1 : vraie**

On détermine les vecteurs directeurs de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$: $\vec{u}_1=(1;2;-1) \quad \vec{u}_2=(5;-2;1)$

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas proportionnelles $(1/5 \neq 2/-2)$. Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont donc pas colinéaires et donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles.

Cherchons le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. On résout le système suivant :

$$\begin{cases} 4+t=8+5t' & (1) \\ 6+2t=2-2t & (2) \\ 4-t=6+t' & (3) \end{cases}$$

De (3), on a : $t'=-2-t$

On remplace dans (1) et (2)

Dans (1) : $4+t=8-10-5t \quad \Leftrightarrow \quad 6t=-6 \quad \Leftrightarrow \quad t=-1$

Dans (2) : $6+2t=2+4+2t \quad \Leftrightarrow \quad 0t=0$ toujours vrai

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont donc sécantes en $\mathrm{I}(3;4;5)$ (on remplace $t=-1$). Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont donc coplanaires.

2) **Proposition 2 : vraie**

Si le point B est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$, on doit avoir $\mathrm{B} \in \mathscr{P}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et le vecteur normal $\vec{n}$ de $\mathscr{P}$ doivent être colinéaires.

- Vérifions que $B \in \mathscr{P}$: $3x + 2y - 5z = 3 \times 3 + 2 \times 1 - 5 \times 2 = 1$ donc $B \in \mathscr{P}$
- On a : $\overrightarrow{AB} = (-9; -6; 15)$ et $\vec{n} = (3; 2; -5)$

  On a : $\dfrac{-9}{3} = \dfrac{-6}{2} = \dfrac{15}{-5} = -3$

  Les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

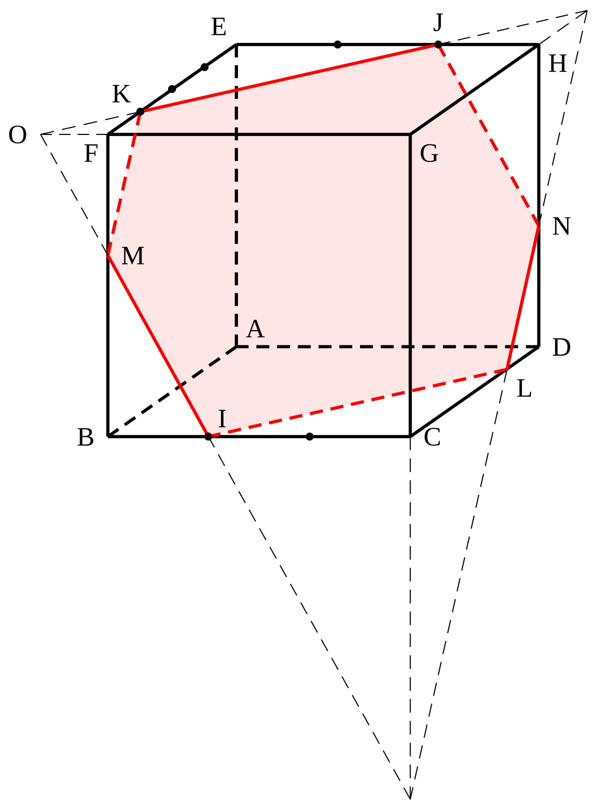
Le point B est donc le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$

Exercice 3

Intersection d'un plan et d'un cube **(8 points)**

1) Les coordonnées de I, J et K sont : $I\left(1; \dfrac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \dfrac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\dfrac{3}{4}; 0; 1\right)$

2) a) On obtient l'intesection suivante



b) Comme J et K sont sur la même face, on trace le segment [JK]. Le droite (JK) et le droite (FG) se coupe en O. Comme O et I sont sur le même plan (BCG), on trace la droite (OI) qui coupe l'arête [BF] en M

3) a) Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IJK) si, et seulement si, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

On a : $\overrightarrow{IJ}\left(-1; \dfrac{1}{3}; 1\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = 8 \times (-1) + 9 \times \dfrac{1}{3} + 5 = -8 + 3 + 5 = 0$

- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IK}} = 8 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) + 9 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 5 = -2 - 3 + 5 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$, le vecteur $\vec{n}$ est donc normal au plan (IJK).

b) Soit $\mathrm{M}(x; y; z)$ un point du plan (IJK), on a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{n} &= 0\\
8(x-1) + 9\left(y - \frac{1}{3}\right) + 5z &= 0\\
8x - 8 + 9y - 3 + 5z &= 0\\
8x + 9y + 5z - 11 &= 0
\end{aligned}$$

c) M est sur l'arête [BF] donc ses coordonnées vérifient : $x = 1$ et $y = 0$, en remplaçant dans l'équation du plan (IJK), on a :

$$8 + 5z - 11 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{3}{5} \quad \text{donc} \quad \mathrm{M}\left(1; 0; \frac{3}{5}\right)$$

N est sur l'arête [DH] donc ses coordonnées vérifient : $x = 0$ et $y = 1$, en remplaçant dans l'équation du plan (IJK), on a :

$$9 + 5z - 11 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2}{5} \quad \text{donc} \quad \mathrm{N}\left(0; 1; \frac{2}{5}\right)$$

L est sur l'arête [CD] donc ses coordonnées vérifient : $y = 1$ et $z = 0$, en remplaçant dans l'équation du plan (IJK), on a :

$$8x + 9 - 11 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad \mathrm{L}\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$$