Contrôle de mathématiques

Mardi 18 novembre 2014

Exercice 1

Racine d'un polynôme du 3e degré **(6 points)**

Soit le polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

1) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x)$
2) Déterminer la dérivée de P.
3) Étudier le signe de P' puis dresser le tableau de variation.
4) Montrer qu'il existe une unique solution α sur $\mathbb{R}$ à l'équation $P(x) = 0$. On **citera** le théorème utilisé.
5) Montrer que $1 < \alpha < 2$ puis déterminer avec l'algorithme par dichotomie un encadrement à 10^{-4} près de α. On donnera le nombre de boucles nécessaires pour obtenir cette précision.

Exercice 2

Étude d'une fonction **(5 points)**

Soit la fonction f définie sur $[-2;\ 2]$ par : $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

1) Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ? Que se passe-t-il en 2 et -2 pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2) Dériver la fonction f puis montrer que la fonction dérivée f' peut se mettre sous la forme : $f'(x) = \dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$
3) Déterminer le signe de la dérivée f' puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-2;\ 2]$.
4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, les tangentes horizontales et les tangentes en 2 et -2 sur l'annexe 1 à rendre avec la copie.

Exercice 3

Calcul de limites **(4 points)**

On justifiera avec soin les limites demandées

1) a) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de $x^2 - 3x + 2$

   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$

2) Soit la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x+\cos x}{x-1}$

   a) Montrer que si $x > 1$, $\dfrac{3x-1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3x+1}{x-1}$

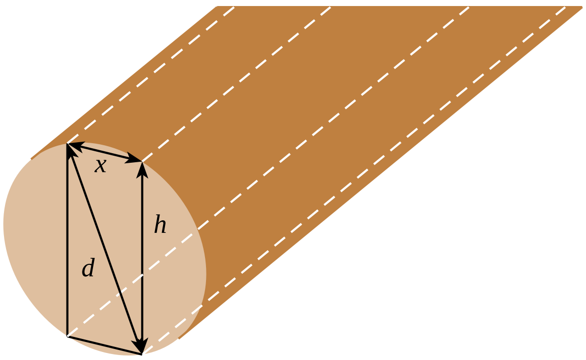
   b) En déduire alors : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x-5}{x-1}}$

EXERCICE 4

Optimisation **(5 points)**

Lorsqu'on veut équarrir un tronc d'arbre de manière à donner à la poutre obtenue la plus grande résistance possible à la flexion, on se garde bien de la faire de section carrée, mais toujours *"plus haute que large"*. Si la base est x et la hauteur h, on montre, en résistance des matériaux, que la résistance à la flexion est d'autant plus grande que xh^2 est grand.



Partie A

f est la fonction définie sur $\left[0; \dfrac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = -x^3 + \dfrac{9}{4}x$.

1) Calculez f' et dressez le tableau de variations de f sur $\left[0; \dfrac{3}{2}\right]$.

2) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point O ainsi que l'équation de la tangente T_2 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

Partie B

Dans cette partie, les lettres d, x et h désignent des longueurs exprimées en mètres.
On suppose que le diamètre d du tronc d'arbre mesure 1,5 mètre.

1) Expliquer pourquoi $x^2 + h^2 = \dfrac{9}{4}$.

2) Calculer xh^2 en fonction de x.

3) En utilisant la partie A de ce problème, trouver x et h de façon que la poutre ait le maximum de résistance à la flexion.

4) Tracer la section de la poutre dans un cercle de rayon 3 cm sur l'annexe 2 à rendre avec la copie.

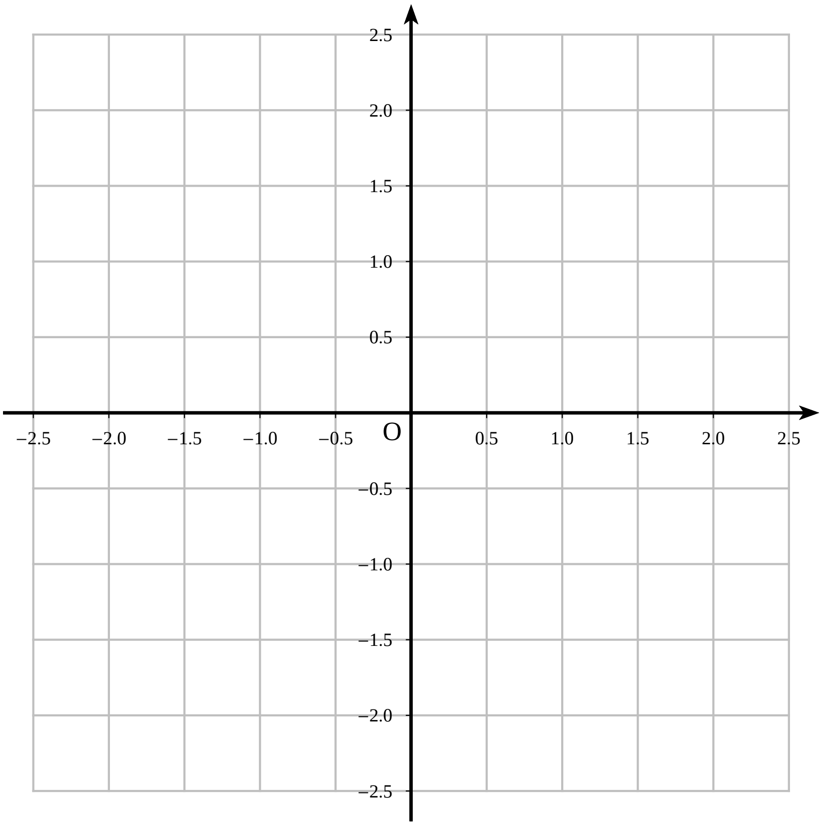
Annexes

(à rendre avec la copie)

Nom :

Prénom :

Annexe 1



Annexe 2