Contrôle de mathématiques

Jeudi 21 novembre 2013

Exercice 1

Continuité **(2 points)**

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

a) Rappeler la définition de la continuité d'une fonction en a

b) f est-elle continue en 0 ?

Exercice 2

Étude d'une fonction **(2 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = x + 5 + \dfrac{9}{x-2}$

a) Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ? Déterminer alors $f'(x)$

⚠ On factorisera la dérivée

b) En déduire les variations de la fonction f puis dresser le tableau de variation en calculant les extremum éventuels. (On ne demande pas de calculer les limites)

Exercice 3

Calcul de limites **(4 points)**

On justifiera avec soin les limites suivantes :

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{3x-1}{4-x^2}$

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$, en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 + x \sin x$

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}$

Exercice 4

Vrai - faux **(2 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

a) Si pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leqslant \dfrac{2}{x}$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) La fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ est dérivable sur $]-\infty; -2[$

EXERCICE 5

Fonction rationnelle et fonctions auxiliaire **(10 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 1cm)

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

   On pose : $g(x) = x^3 + 3x + 8$

   a) Étudier les variations de la fonction g.

   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-2; 0]$

   c) Déterminer un encadrement à 10^{-3} à l'aide de votre calculatrice.

   d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x

2) **Étude de la fontion *f***

   a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

   b) Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = \dfrac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2 + 1)^2}$

   c) À l'aide d'un tableau de signe donner le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

   d) En écrivant $f(x) = \dfrac{x(x^3 - 4)}{x^3 + x}$, montrer alors que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$

   e) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

   f) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = x$?

3) **Représentation de la fonction *f***

   a) Recopier puis remplir le tableau de valeurs suivants :

x	-4	$-2,5$	-1	0	1	2	4
$f(x)$							

   b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ en indiquant les tangentes horizontales et en s'aidant du tableau de valeurs de la question précédente.