Correction contrôle de mathématiques
Du lundi 23 novembre 2015

EXERCICE 1

Limites **(3 points)**

1) On pose $\dfrac{2x^2-5x+4}{x-2} = \dfrac{x\left(2x-5+\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = \dfrac{2x-5+\dfrac{4}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5+\dfrac{4}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{2}{x} = 1\end{array}\right\} \quad \text{Par quotient} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+4}{x-2} = -\infty$$

2) Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ (x-2)^2 \geqslant 0$, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2} x-5 = -3 \\ \lim\limits_{x\to2}(x-2)^2 = 0^+\end{array}\right\} \quad \text{Par quotient} \quad \lim_{x\to2} \frac{x-5}{(x-2)^2} = -\infty$$

3) On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	+	0	−

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} 2-x = 0^+$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{3}{2-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ par composition $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \sqrt{\dfrac{3}{2-x}} = +\infty$

EXERCICE 2

Continuité et dérivabilité **(5 points)**

1) Un fonction f est continue en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si $x \neq 0$ $\quad -1 \leqslant \cos\dfrac{1}{x} \leqslant -1$ en multipliant par $|x|$, on a :

$-|x| \leqslant |x|\cos\dfrac{1}{x} \leqslant |x|$ or $\lim\limits_{x\to0} -|x| = \lim\limits_{x\to0} |x| = 0$

d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to0} |x|\cos\dfrac{1}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$

La fonction f est donc continue en 0.

2) **La proposition est fausse**. Pour trouver un contre exemple, il faut prendre la courbe d'une fonction possédant un point anguleux comme $f(x) = |x|$ en 0.

La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en 0. Par contre :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x>0}} \frac{f(h)-f(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x>0}} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x>0}} \frac{h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x>0}} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} \frac{f(h)-f(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} \frac{|h|-0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} \frac{-h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} -1 = -1$$

$\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ x>0}} \frac{f(h)-f(x)}{h} \neq \lim_{\substack{h\to 0\\ x<0}} \frac{f(h)-f(x)}{h}$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

3) On a le tableau suivant :

x	-2	1	3	5
$f(x)$	6	2	-2	1
$f'(x)$	0	-3	$-\frac{2}{3}$	4

Exercice 3

Étude d'une fonction **(9 points)**

1) a) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ car u est un polynôme.

$u'(x) = 6x^2 - 8x + 2 = 2(3x^2 - 4x + 1)$

$u'(x) = 0 \iff 3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x_1 = 1$ racine évidente, $P = \frac{1}{3}$ donc $x_2 = \frac{1}{3}$

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		α		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$u(x)$		$\nearrow$	$-\frac{19}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) $u(2) = 3$, sur $[1\ ;\ 2]$
- u est continue (car dérivable)
- u est monotone (croissante)
- $u(1)u(2) = -3 < 0$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [1\ ;\ 2]$ tel que $u(\alpha) = 0$

D'après le tableau de variation :
- si $x > 2$, $u(x) > 0$ donc ne s'annule pas ;
- si $x < 1$, $u(x) < 0$ donc ne s'annule pas.

Conclusion : $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et $1 < \alpha < 2$

c) On trouve : $1{,}565\,1 < \alpha < 1{,}565\,2$ avec 14 itérations

d) On obtient la tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

2) a) Limites en $\pm\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

Par un même raisonnement, on trouve : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Limites en 1 : on établit le tableau de signes puis on passe à la limite :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x-1 = 0^-$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x-1 = 0^+$ par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1} x^2 = 1$ par somme $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$

b) $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x(x^2-2x+1)-1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2+2x-1}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, $(x-1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $u(x)$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\approx 4{,}219$	↗	$+\infty$

d) D'après le tableau de variation, f ne peut s'annuler que si $x < 1$. On calcule alors : $f(-1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = -1$, donc $-1 < \beta < 0$

Avec le programme de dichotomie, on trouve : $-0,76 < \beta < -0,75$ avec 7 itérations

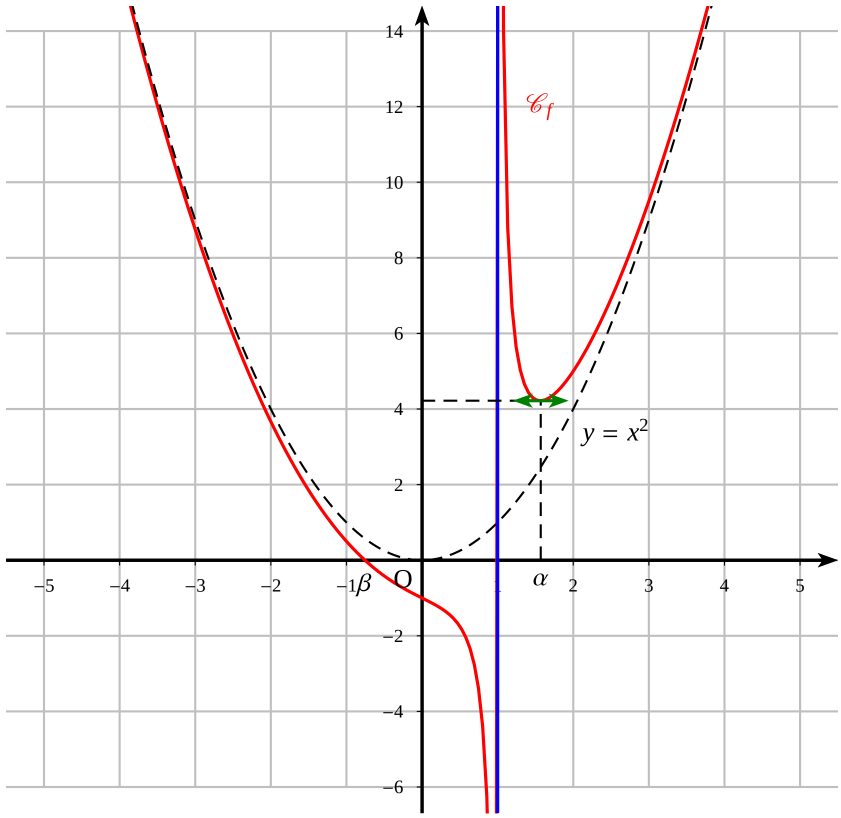
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0.$

La parabole d'équation $y = x^2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ car la différence entre les deux courbe tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$

Cet algorithme calcule le plus petit entier X pour lequel la différence entre $f(x)$ et la fonction carrée est plus petite que 10^{-3}. car $f(x) - x^2 = \dfrac{1}{x-1}$

Le programme affiche alors : 1002

A titre d'information, voici la courbe $\mathscr{C}_f$



EXERCICE 4

Fonctions dérivées **(3 points)**

1) f est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ car une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+3)^2 - 4}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+3-2)(2x+3+2)}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+1)(2x+5)}{(2x+3)^2}$$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

$$f(x) = 4(6x-1)(3x^2 - x + 1)^3 \quad \text{car} \quad (u^n)' = n\,u'u^{n-1}$$

3) f est dérivable si $3x + 1 > 0 \iff x > -\dfrac{1}{3}$. f est donc dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$

$$f'(x) = \sqrt{3x+1} + x \times \frac{3}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{2(3x+1)+3x}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{9x+2}{2\sqrt{3x+1}}$$