Suites logistiques
Algorithme

1 Définition et propriétés

Définition 1 : Une suite logistique (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 \in [0\,;\,1] \quad \text{et} \quad u_{n+1} = ku_n(1-u_n) \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}_+$$

Remarque : Ces suites peuvent modéliser l'évolution de la taille d'une population au fil du temps. Le terme u_n correspond alors au rapport de la population d'une espèce sur la population maximale de cette espèce.

Propriété : En faisant varier le paramètre k, plusieurs comportements sont possibles :

- $0 \leqslant k \leqslant 1$,
  La suite (u_n) est décroissante et converge vers 0. La population d'éteint.
- $1 < k \leqslant 3$,
  La suite (u_n) est converge vers $\dfrac{k-1}{k}$. La population finit par se stabiliser. On peut distinguer deux cas
  a) $1 < k \leqslant 2$. La suite est monotone et majorée à partir du rang 1. Elle converge rapidement.
  b) $2 \leqslant k \leqslant 3$. La suite n'est plus monotone et oscille autour de sa limite. La convergence est de plus en plus lente, elle devient extrêmement faible pour $k = 3$.
- $3 < k \leqslant 3,57$,
  La suite ne converge plus. Cependant les termes d'ordre pair u_{2n} tendent vers une certaine limite, ceux d'ordre impair u_{2n+1} vers une autre. On dit qu'on a un cycle d'ordre 2. Puis si k augmente encore, les termes convergent vers 4 valeurs distinctes. On a désormais un cycle d'ordre 4. Lorsque k croît encore un peu, on voit apparaître des cycles d'ordre 8 ... et ainsi de suite. La suite oscille donc entre 2 puis 4, puis 8, ... (puissance de 2) points attracteurs. La population oscille entre 2, 4, 8, ... valeurs.

  Ce passage d'un cycle de longueur 2 à un cycle de longueur 4, puis d'un cycle de longueur 4 à un cycle de longueur 8, etc. porte le nom de **bifurcation**.
  a) $3 < k \leqslant 1+\sqrt{6} \approx 3{,}449\,490$, cycle d'ordre 2
  b) $3{,}449\,490 < k \leqslant 3{,}544\,090$, cycle d'ordre 4
  c) $3{,}544\,090 < k \leqslant 3{,}564\,407$, cycle d'ordre 8
  d) $3{,}564\,007 < k \leqslant 3{,}568\,750$, cycle d'ordre 16
  e) ...

- $3,57 < k \leqslant 4$.
  Lorsque k s'approche de 4, plus rien n'est prévisible, la suite admet tantôt des cycles d'ordre qui semblent arbitraires, tantôt pas de cycles du tout ! C'est le chaos !

Définition 2 : Comportement chaotique

La suite est attirée par un attracteur étrange géométriquement très complexe (objet fractal) et l'évolution de la suite vers cet attracteur a un comportement erratique imprévisible. De plus, l'évolution est très sensible à la condition initiale : d'infime modification de u_0 provoque une évolution très différente de la suite vers l'attracteur. On dit que le comportement de la suite est chaotique. Ce chaos qui reflète le manque d'information sur l'attracteur et sur l'évolution de la suite est néanmoins déterministe puisque engendré par une suite parfaitement connu. On appelle parfois ce phénomène *l'effet papillon*.

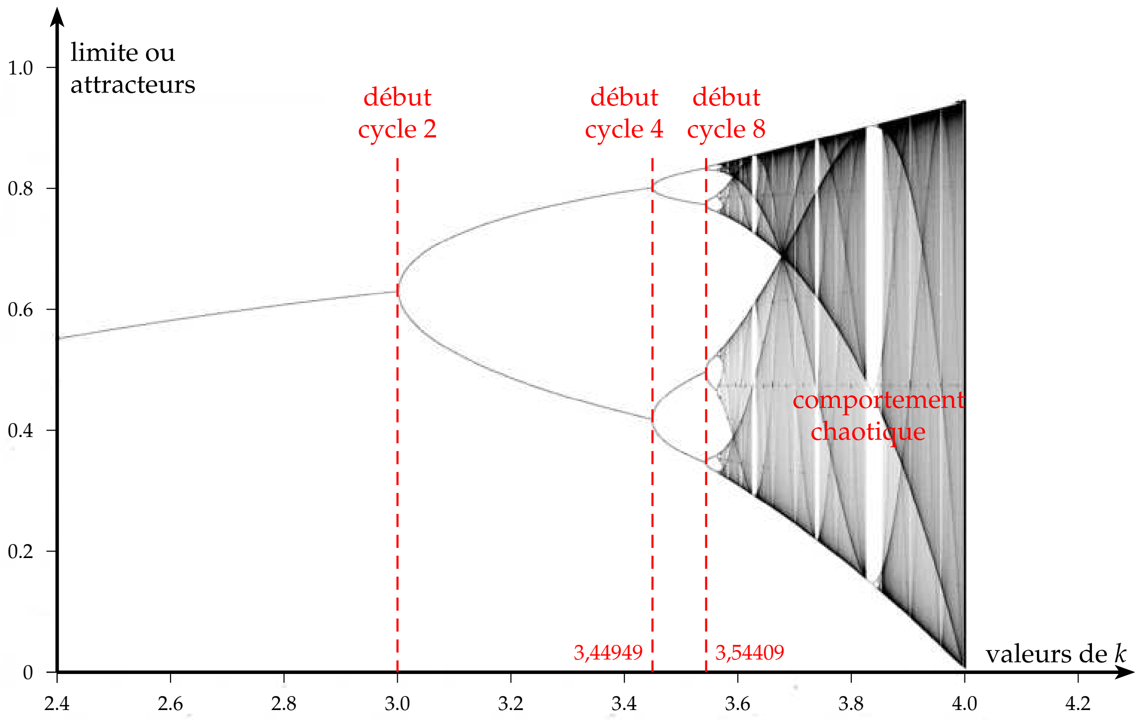


Diagramme des bifurcations

- $k > 4$, la suite quitte l'intervalle $[0\,;1]$ et la suite diverge rapidement.

2 Étude d'un cas particulier $k = 2$

Le but est de montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$ avec $u_0 \in]0\,;\,1[$ est convergente vers 0,5 pour tout $u_0 \in]0;1[$

1) Étudier les variations sur $[0\,;1]$ de la fonction f associée à la suite.

2) En déduire que la fonction f est stable sur $]0\,;\,0,5[$, c'est à dire que $\forall x \in]0\,;\,0,5[,\ f(x) \in]0\,;\,0,5[$.

3) Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0\,;1]$.

4) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1 et bornée par l'intervalle $]0\,;1[$.

5) En déduire la convergence de la suite (u_n).

1) La fonction f associée est une fonction trinôme : $f(x) = 2x(1-x)$.

La forme canonique est $f(x) = -2(x-0,5)^2 + 0,5$

La parabole $\mathscr{C}_f$ est dirigée vers le bas car le coefficient (-1) devant x^2 est négatif. On a donc les variations de f suivante sur $[0\,;1]$:

x	0		0.5		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	0.5	$\searrow$	1

2) D'après le tableau de variation, il est clair que $x \in]0\,;\,0,5[\;\Rightarrow\; f(x) \in]0\,;\,0,5[$. La fonction f est stable sur $]0\,;\,0,5[$.

3) Signe de $f(x) - x$:

$f(x) - x = 2x(1-x) - x = 2x - 2x^2 - x = x - 2x^2 = x(1-2x)$

Cette quantité s'annule pour 0 et 0,5. Comme le coefficient devant x^2 est négatif, le signe de $f(x) - x$ est négatif à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur. On obtient le tableau de signes sur $[0\,;1]$:

x	0		0.5		1
$f(x) - x$	0	$+$	0	$-$	

4) Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\; 0 < u_n \leqslant u_{n+1} < 0,5$

Initialisation : Pour $n = 1$.

- On sait que $u_0 \in]0\,;\,1[$, donc, d'après le tableau de variation de la fonction associée, on a $0 < f(u_0) < 0,5$ donc $u_1 \in]0\,;\,0,5[$.
- Comme $f(x) - x > 0$ si $x \in]0\,;\,0,5[$ alors $u_1 \in]0\,;\,0,5[,\; f(u_1) - u_1 > 0 \;\Leftrightarrow\; f(u_1) > u_1 \;\Leftrightarrow\; u_2 > u_1$
- Comme la fonction f est stable sur $]0\,;\,0,5[$, $u_2 = f(u_1) \in]0\,;\,0,5[$

On a donc $0 < u_1 < u_2 < 0,5$. La proposition est initialisée.

Hérédité : On admet que $0 < u_n \leqslant u_{n+1} < 0,5$.
Montrons que $0 < u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 0,5$

Par hypothèse : $0 < u_n \leqslant u_{n+1} < 0,5$
Comme la fonction f est croissante sur $]0\,;\,0,5[$, on a donc :
$f(0) < f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f(0,5) \;\Leftrightarrow\; 0 < u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 0,5$
La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1 et bornée par l'intervalle $]0\,;\,0,5[$

5) La suite (u_n) est croissante et majorée par 0,5, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers $0 < \ell \leqslant 0,5$

Comme la fonction f est continue sur $]0\,;\,0{,}5[$, d'après le théorème du point fixe $\ell = f(\ell)$.

$\ell = f(\ell) \quad \Leftrightarrow \quad f(\ell) - \ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 0 \text{ ou } \ell = 0,5$

Comme $\ell > 0$, $\ell = 0,5$, la suite (u_n) converge vers 0,5.

3 Algorithmes

3.1 Visualisation des différents cas

Il s'agit d'un algorithme permettant des visualiser les n premiers termes d'une suite logistique de paramètre k et de premier terme u_0

On doit d'abord rentrer les deux fonctions :
$Y_1 = KX(1 - X)$
$Y_2 = X$

On rentre les valeurs $U = u_0$, K et N

On trace alors le premier segment vertical à partir de u_0

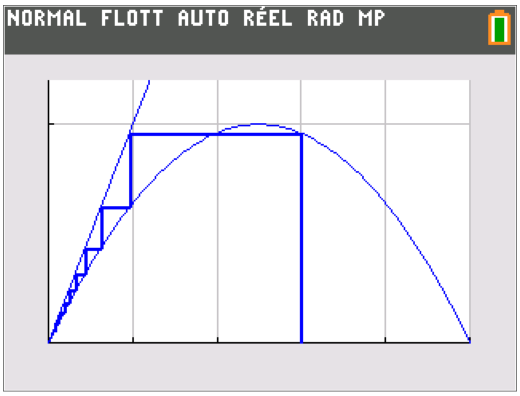
On conserve l'ancienne valeur de U dans V

On trace ensuite les deux segments formant l'escalier, le premier horizontal et le second vertical

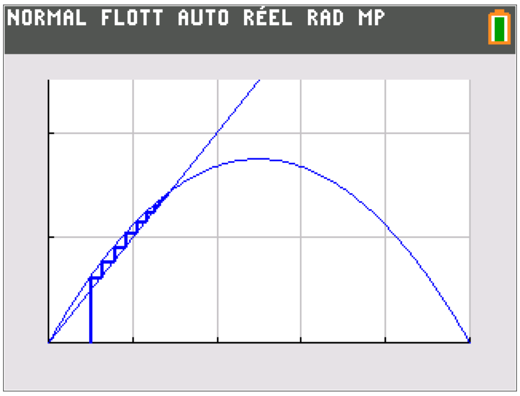
Variables : I, N entiers K, U, V réels
Y_1 et Y_2 fonctions
Entrées et initialisation
- Effacer dessin
- Lire U, K, N
- Afficher Y_1
- Afficher Y_2
- Tracer segment$(U, 0, U, Y_1(U))$

Traitement et sorties
- **pour** I de 1 à N **faire**
  - $U \to V$
  - $KU(1 - U) \to U$
  - Tracer segment(V, U, U, U)
  - Tracer segment$(U, U, U, Y_1(U))$
- **fin**

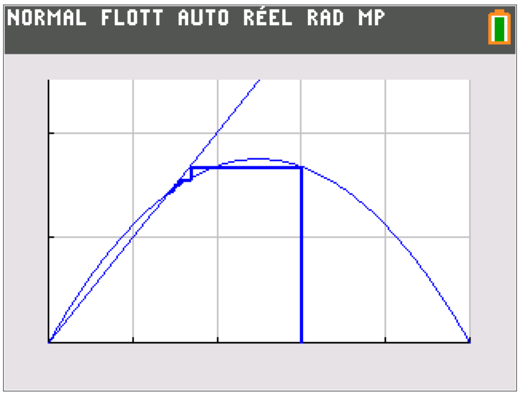
```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:SLOGIST
:EffDess
:Prompt U,K,N
:DessF Y1
:DessF Y2
:Ligne(U,0,U,Y1(U))
:For(I,1,N)
:U→V
:KU(1-U)→U
:Ligne(V,U,U,U)
:Ligne(U,U,U,Y1(U))
:End
```



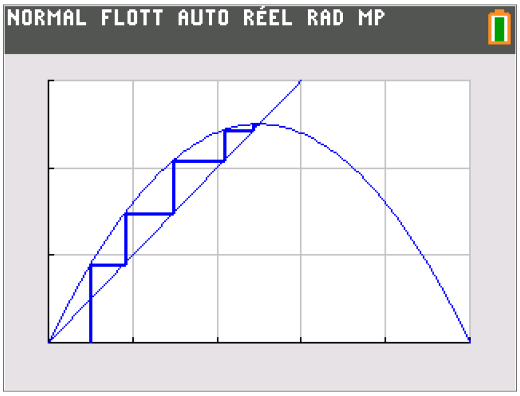
$U = 0,6,\ K = 0,8,\ N = 10 \quad \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
suite décroissante



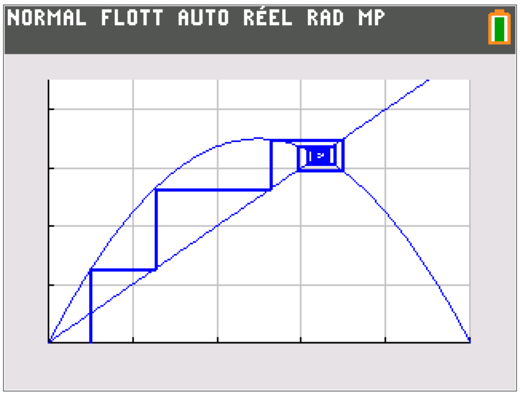
$U = 0,1,\ K = 1,4,\ N = 10 \quad \lim_{n\to+\infty} u_n \approx 0,285$
suite croissante



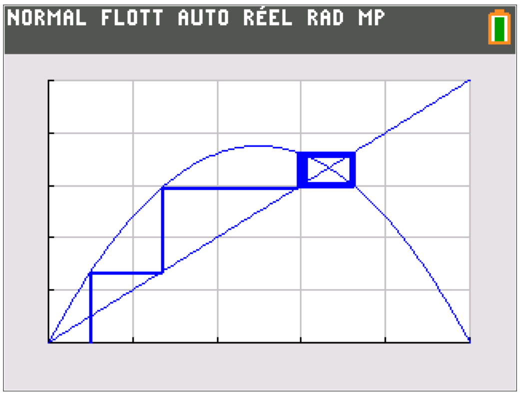
$U = 0,6,\ K = 1.4,\ N = 10 \quad \lim_{n\to+\infty} u_n \approx 0,285$
suite décroissante



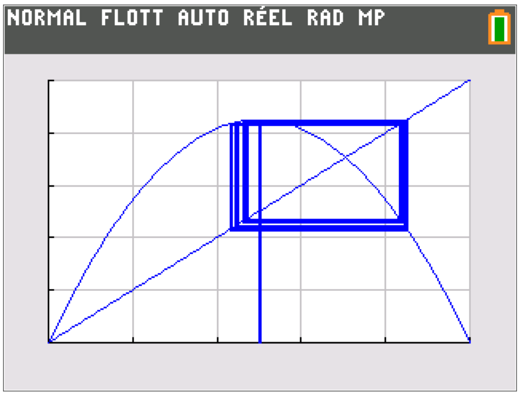
$U = 0,1,\ K = 2,\ N = 10 \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0,5$
suite croissante



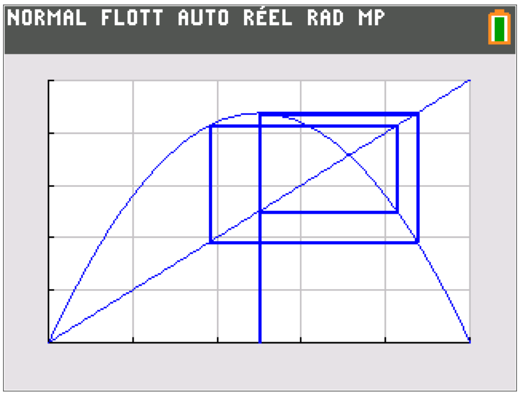
$U = 0,1,\ K = 2.8,\ N = 10 \quad \lim_{n\to+\infty} u_n \approx 0,643$
la suite oscille autour de sa limite



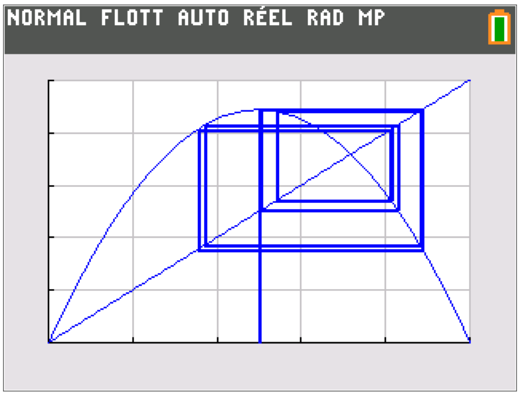
$U = 0,1,\ K = 3,\ N = 10 \quad \lim_{n\to+\infty} u_n \approx 0,667$
la suite oscille très lentement vers sa limite



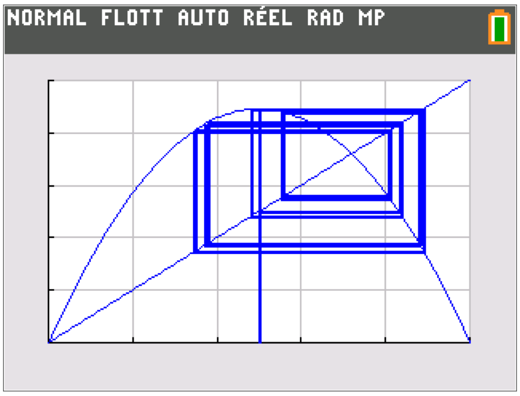
$U = 0,5,\ K = 3.4,\ N = 10$ pas de limite
cycle d'ordre 2



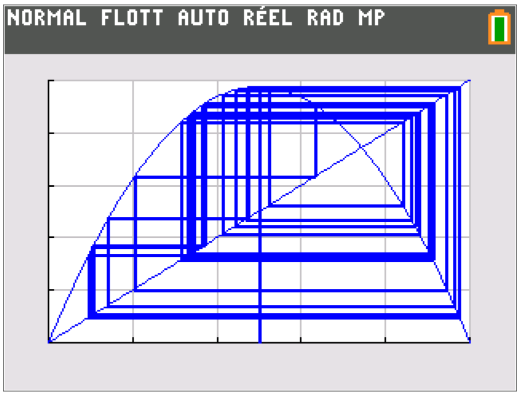
$U = 0,5,\ K = 3.5,\ N = 20$ pas de limite
cycle d'ordre 4



$U = 0,55,\ K = 3.55,\ N = 20$ pas de limite
cycle d'ordre 8



$U = 0,5,\ K = 3.566,\ N = 20$ pas de limite
cycle d'ordre 16



$U = 0,5,\ K = 3.9,\ N = 30$ pas de limite
comportement chaotique

3.2 Vitesse de convergence

À partir de $k = 2$ jusqu'à $k = 3$ la suite oscille autour de sa limite de plus en plus lentement. Il s'agit d'un algorithme qui permet de déterminer le plus petit entier n pour que la suite, initialisée à u_0 pour un k donné, se trouve à moins de 10^{-p} de sa limite.

Si on admet que la suite est convergente, comme la fonction associée est continue sur $[0\,;\,1]$, la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$ (théorème du point fixe)

$$\ell = k\ell(1-\ell) \quad \Leftrightarrow \quad \ell = k\ell - k\ell^2$$

$$k\ell^2 + (1-k)\ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ell(k\ell + 1 - k) = 0$$

$$\ell = 0 \text{ (non retenue)} \quad \text{ou} \quad \ell = \frac{k-1}{k}$$

Variables : P, N entiers $\quad U, K$ réels
Entrées et initialisation
  Lire U, K, P
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $\left|U - \dfrac{K-1}{K}\right| \geqslant 10^{-P}$ **faire**
    $KU(1-U) \to U$
    $N + 2 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

Pour $u_0 = 0,1$ et $p = 3$, on trouve en fonction des valeurs de k, les valeur de n suivantes :

k	2	2,5	2,8	2,9	2,95	2,99	3
n	5	7	21	41	79	339	55 369

On s'aperçoit que la vitesse de convergence en 3 est particulièrement lente ! ! !